Lösungen zur Aufg. 1: Berechne ohne Taschenrechner!

a) $\log_2(16) = \underline{\mathbf{4}}$
b) $\log_2(0{,}5) = \underline{\mathbf{-1}}$
c) $\lg(10.000) = \underline{\mathbf{4}}$
d) $\lg(0{,}01) = \underline{\mathbf{-2}}$
e) $\log_2(64) = \underline{\mathbf{6}}$
f) $\log_3(81) = \underline{\mathbf{4}}$
g) $\log_3(\frac{1}{9}) = \underline{\mathbf{-2}}$
h) $\log_5(125) = \underline{\mathbf{3}}$
i) $\log_4(2) = \underline{\frac{1}{2}}$
j) $\log_3(\sqrt{3}) = \underline{\frac{1}{2}}$
k) $\log_{16}(2) = \underline{\frac{1}{4}}$
l) $\log_7(7) = \underline{\mathbf{1}}$
m) $\log_2(2^{13}) = \underline{\mathbf{13}}$
n) $\log_7(\frac{1}{49}) = \underline{\mathbf{-2}}$
o) $\log_2(2^n) = \underline{\mathbf{n}}$
p) $\log_5(1) = \underline{\mathbf{0}}$
q) $\log_b(1) = \underline{\mathbf{0}}$
r) $\log_a(\frac{1}{a}) = \underline{\mathbf{-1}}$
s) $\lg(1) = \underline{\mathbf{0}}$
t) $\log_b(b^n) = \underline{\mathbf{n}}$
u) $\log_{\sqrt{2}}(2) = \underline{\mathbf{2}}$
v) $\log_{\sqrt{3}}(9) = \underline{\mathbf{4}}$
w) $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}) = \underline{\mathbf{-2}}$
x) $\log_{\sqrt{a}}(a) = \underline{\mathbf{2}}$

Lösungen zur Aufg. 2: Bei Ergebnisabweichungen: Beim Eingaben in den TR die Klammern beachten!

$\log_2(3) \approx \underline{\mathbf{1{,}58}}$; $\log_2(6) \approx \underline{\mathbf{2{,}58}}$; $\log_2(3{,}5) \approx \underline{\mathbf{1{,}81}}$; $\log_2(5{,}67) \approx \underline{\mathbf{2{,}5}}$, $\log_2(0{,}17) \approx \underline{\mathbf{-2{,}56}}$; $\log_2(\frac{1}{2}) = \underline{\mathbf{-1}}$;
$\log_2(\frac{1}{4}) = \underline{\mathbf{-2}}$

$\log_{1,34}(3) \approx \underline{\mathbf{3{,}75}}$; $\log_{1,34}(6) \approx \underline{\mathbf{6{,}12}}$; $\log_{1,34}(3{,}5) \approx \underline{\mathbf{4{,}28}}$; $\log_{1,34}(5{,}67) \approx \underline{\mathbf{5{,}93}}$; $\log_{1,34}(0{,}17) \approx \underline{\mathbf{-6{,}05}}$;
$\log_{1,34}(\frac{1}{2}) \approx \underline{\mathbf{-2{,}37}}$; $\log_{1,34}(\frac{1}{4}) \approx \underline{\mathbf{-4{,}74}}$

$\lg(3) \approx \underline{\mathbf{0{,}48}}$; $\lg(6) \approx \underline{\mathbf{0{,}78}}$; $\lg(3{,}5) \approx \underline{\mathbf{0{,}54}}$; $\lg(5{,}67) \approx \underline{\mathbf{0{,}75}}$; $\lg(0{,}17) \approx \underline{\mathbf{-0{,}77}}$; $\lg(\frac{1}{2}) \approx \underline{\mathbf{-0{,}3}}$; $\lg(\frac{1}{4}) \approx \underline{\mathbf{-0{,}6}}$

$\log_3(1) = \underline{\mathbf{0}}$; $\log_3(2) \approx \underline{\mathbf{0{,}63}}$; $\log_3(4{,}89) \approx \underline{\mathbf{1{,}44}}$; $\log_3(\frac{1}{2}) \approx \underline{\mathbf{-0{,}63}}$; $\log_3(\frac{1}{4}) \approx \underline{\mathbf{-1{,}26}}$; $\log_3(\frac{1}{5}) \approx \underline{\mathbf{-1{,}46}}$;
$\log_3(7) \approx \underline{\mathbf{1{,}77}}$

$\log_{\sqrt{2}}(1) = \underline{\mathbf{0}}$; $\log_{\sqrt{2}}(2) = \underline{\mathbf{2}}$; $\log_{\sqrt{2}}(4{,}89) \approx \underline{\mathbf{4{,}58}}$; $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}) = \underline{\mathbf{-2}}$; $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4}) = \underline{\mathbf{-4}}$; $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{5}) \approx \underline{\mathbf{-4{,}64}}$;
$\log_{\sqrt{2}}(7) \approx \underline{\mathbf{5{,}61}}$

Lösungen zur Aufg. 3:

a) $\log_2(y)=5 \Leftrightarrow \mathbf{y=32}$; $\log_6(y)=1 \Leftrightarrow \mathbf{y=6}$; $\lg(y)=3 \Leftrightarrow \mathbf{y=1.000}$; $\log_{17}(y)=2 \Leftrightarrow \mathbf{y=289}$;
$\log_{\sqrt{3}}(y)=3\cdot \Leftrightarrow \mathbf{y=3\cdot}\sqrt{3}$

b) $\log_b(8)=3 \Leftrightarrow \mathbf{b=2}$; $\lg(100)=2 \Leftrightarrow \mathbf{b=10}$ (dek. Log. !) ; $\log_b(1)=5 \Leftrightarrow \mathbf{b=1}$; $\log_b(\sqrt{5})=0{,}5 \Leftrightarrow \mathbf{b=5}$

c) $\log_b(1)=0$ ist äquivalent zu $b^0=1$; da dies aber für alle $b\in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, gibt es keine eindeutige Basis zu diesem Logarithmus.

Lösungen zur Aufg. 4:

Gesucht ist eine Exponentialfunktion der Form: $f(x)=a\cdot b^x$, es gilt: $f(0)=8$ (Nach „Null Tagen" sind bereits 8 Bak. vorhanden) und $f(4)=24$ (Nach 4 Tagen sind 24 Bak. vorhanden)
$f(0)=a\cdot b^0 = a\cdot 1=a = 8 \Rightarrow a=8$
$f(4)=8\cdot b^4 = 24 \Rightarrow b^4 = 3 \Rightarrow b=\sqrt[4]{3}\approx 1{,}316$ Die gesuchte Funktion lautet f mit $f(x)=8\cdot 1{,}316^x$.

Verdoppelungszeit:
Gesucht ist eine Zeit x mit $f(x)=2\cdot 8=16$.
$f(x)=8\cdot 1{,}316^x=16$ also $8\cdot 1{,}316^x=16$ | (:8)
$\Leftrightarrow 1{,}316^x=2$
$\Leftrightarrow \log_{1,316}(2)=x$ mit dem TR ergibt sich: $x=\frac{\lg(2)}{\lg(1{,}316)}\approx 2{,}524$

Die Verdoppelungszeit beträgt ungefähr $2\frac{1}{2}$ Tage.

Zeit bis zum 100. Bakterium:
Gesucht ist eine Zeit x mit $f(x)=100$
$f(x)=100=8\cdot 1{,}316^x$ | (:8)
$\Leftrightarrow 12{,}5 = 1{,}316^x$
$\Leftrightarrow x=\log_{1,316}(12{,}5) = \frac{\lg(12{,}5)}{\lg(1{,}316)}\approx 9{,}198$
Nach rd. 9,2 Tagen sind es 100 Bakterien.

Lösungen zur Aufg. 5:

a) Forme mit Hilfe der Logarithmengesetze in eine Summe/Differenz um und vereinfache:

I) $\log_b(4\cdot x)$ = $\underline{\mathbf{\log_b(4)+\log_b(x)}}$

II) $\log_b(\frac{r}{s})$ = $\underline{\mathbf{\log_b(r)-\log_b(s)}}$

III) $\log_b(\frac{xyz}{5b})=\log_b(xyz)-\log_b(5b) = \log_b(x)+\log_b(y)+\log_b(z)-\log_b(5)-\log_b(b)$

$= \underline{\mathbf{\log_b(x)+\log_b(y)+\log_b(z)-\log_b(5)-1}}$

b) Forme so um, dass im Numerus keine Potenz steht :

I) $\log_b(x^5)$ = $\underline{\mathbf{5\cdot\log_b(x)}}$

II) $\log_b(z^{-\frac{2}{3}})$ = $\underline{\mathbf{-\frac{2}{3}\cdot\log_b(z)}}$

III) $\log_b(\sqrt[4]{a})$ = $\underline{\mathbf{\log_b(a^{\frac{1}{4}}) = \frac{1}{4}\cdot\log_b(a)}}$

IV) $\log_b(\frac{1}{\sqrt[3]{z^5}})$ = $\underline{\mathbf{\log_b(z^{-\frac{5}{3}}) = -\frac{5}{3}\cdot\log_b(z)}}$

c) Wende die Logarithmengesetze an:

I) $\log_b\left(\frac{6a^2}{7c^2}\right) = \log_b(6a^2)-\log_b(7c^2) = \log_b(6)+\log_b(a^2)-\log_b(7)-\log_b(c^2)$

$= \underline{\mathbf{\log_b(6)+2\cdot\log_b(a)-\log_b(7)-2\cdot\log_b(c)}}$

II) $\log_b\left(\frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{\frac{3}{4}\cdot y^4}\right)^6 = 6\cdot\log_b\left(\frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{\frac{3}{4}\cdot y^4}\right) = 6\cdot[\log_b(\sqrt{3}\cdot x^2)-\log_b(0{,}75\cdot y^4)]$

$= 6\cdot[\log_b(\sqrt{3})+\log_b(x^2)-\log_b(0{,}75)-\log_b(y^4)]$

$= 6\cdot[\log_b(\sqrt{3})+2\cdot\log_b(x)-\log_b(0{,}75)-4\cdot\log_b(y)]$

$= \underline{\mathbf{6\log_b(\sqrt{3})+12\cdot\log_b(x)-6\cdot\log_b(0{,}75)-24\cdot\log_b(y)}}$

oder noch weiter vereinfacht: $= 6\log_b(3^{\frac{1}{2}})+12\cdot\log_b(x)-6\cdot\log_b(0{,}75)-24\cdot\log_b(y)$

$= 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_b(3)+12\cdot\log_b(x)-6\cdot\log_b(0{,}75)-24\cdot\log_b(y)$

$= 3\cdot\log_b(3)+12\cdot\log_b(x)-6\cdot\log_b(0{,}75)-24\cdot\log_b(y)$

III) $\log_b(x+y)^2$ = $\underline{\mathbf{2\cdot\log_b(x+y)}}$

d) Fasse zusammen, vermeide Brüche im Exponenten.

I) $3\cdot\log_b(x)+2\cdot\log_b(y) = \log_b(x^3)+\log_b(y^2)$ = $\underline{\mathbf{\log_b(x^3\cdot y^2)}}$

II) $\frac{2}{3}\cdot\log_b(a)-\frac{4}{5}\cdot\log_b(c)+0{,}75\cdot\log_b(d)$ = $\mathbf{\log_b((a^{\frac{2}{3}}\cdot d^{\frac{3}{4}}):c^{\frac{4}{5}})}$ = $\underline{\mathbf{\log_b}}\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{d^3}}{\sqrt[5]{c^4}}\right)$

III) $3\cdot\log_b(a)-\frac{2}{3}\cdot\log_b(c) = \log_b(a^3)-\log_b(c^{\frac{2}{3}})$ = $\underline{\mathbf{\log_b(\frac{a^3}{\sqrt[3]{c^2}})}}$

e) Berechne (wenn möglich) im Kopf:

I) $\lg(8)+\lg(5)+\lg(25) = \lg(8\cdot 5\cdot 25) = \lg(1000)$ = $\underline{\mathbf{3}}$

II) $\lg(\frac{5}{3})+\lg(\frac{4}{5})+\lg(0{,}75) = \lg(\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}) = \lg(1)$= $\underline{\mathbf{0}}$

III) $\log_2(7)+\log_2(12)-\log_2(\frac{21}{4}) = \log_2(7\cdot 12\cdot\frac{4}{21}) = \log_2(16)$= $\underline{\mathbf{4}}$

Lösungen zur Aufg. 6:

a) Bestimme die Lösungsmengen der beiden Gleichungen

I) $\log_2(x)+\log_2(3)=\log_2(5)$

$\Leftrightarrow \log_2(x\cdot 3) = \log_2(5)$ (Hier sieht man schon: Es muss gelten $x\cdot 3 = 5$, also $x=\frac{5}{3}$; $\underline{\mathbf{L=\{\frac{5}{3}\}}}$)

Aber du kannst noch sicher weiterrechnen, siehe nächstes Blatt

$\Leftrightarrow \log_2(x\cdot 3) = \log_2(5)$
$\Leftrightarrow \log_2(3x) - \log_2(5) = 0$
$\Leftrightarrow \log_2(\frac{3x}{5}) = 0$
$\Leftrightarrow 2^0 = \frac{3x}{5}$
$\Leftrightarrow 1 = \frac{3x}{5}$
$\Leftrightarrow 5 = 3x$
$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ **L={$\frac{5}{3}$}**

II) $\log_2(y) - 2\cdot\log_2(25) = 2$
$\Leftrightarrow \log_2(y) - \log_2(25^2) = 2$
$\Leftrightarrow \log_2(\frac{y}{25^2}) = 2 = \log_2(4)$ (denn $2^2=4$ also $\log_2(4)=2$)
$\Leftrightarrow \frac{y}{25^2} = 4$
$\Leftrightarrow y = 2.500 \Rightarrow$ **L={2.500}**

b) Bestimme die Lösungsmenge der Exponentialgleichungen (Taschr. , Rundung: 2. NKS):
I) $5^x=7 \Leftrightarrow \log_5(7)=x \Rightarrow x\approx 1{,}21$ **L≈{1,21}**

II) $5\cdot 6^{2x} = 6\cdot 5^{2x}$
$\lg(5\cdot 6^{2x}) = \lg(6\cdot 5^{2x})$
$\Leftrightarrow \lg(5)+\lg(6^{2x}) = \lg(6)+\lg(5^{2x})$
$\Leftrightarrow \lg(5)+2x\cdot\lg(6) = \lg(6)+2x\cdot\lg(5)$
$\Leftrightarrow 0{,}7+2x\cdot 0{,}78 \approx 0{,}78+2x\cdot 0{,}7$
$\Leftrightarrow 0{,}7+1{,}56x \approx 0{,}78+1{,}4x$
$\Leftrightarrow 1{,}56x-1{,}4x \approx 0{,}78-0{,}7$
$\Leftrightarrow 0{,}16x \approx 0{,}08$
$\Leftrightarrow x\approx 0{,}5 \Rightarrow$ **L≈{0,5}**

Lösung zur Aufg. 7:

nach null mal Falten: 0,2 mm Papierdicke
nach einmal Falten: 0,4 mm Papierdicke
nach zweimal falten: 0,8 mm Papierdicke u.s.w.
Gesucht: f mit $f(x)=a\cdot b^x$ und wir wissen: $f(0)=0{,}2$ und $f(1)=0{,}4$
$f(0)=a\cdot b^0=a\cdot 1=a=0{,}2$; also $a=0{,}2$
$f(1)=0{,}2\cdot b^1=0{,}2\cdot b=0{,}4 \Rightarrow b=0{,}4:0{,}2=2$
Die gesuchte Funktion lautet f mit $f(x)=0{,}2\cdot 2^x$
384.000. km = 384.000.000 m = 384.000.000.000 mm
Nun ist die Anzahl der Faltungen x gesucht, für die gilt, dass f(x)= 384.000.000.000
Also: $f(x)= 0{,}2\cdot 2^x=384.000.000.000 \quad | :0{,}2$
$\Leftrightarrow 2^x = 1.920.000.000.000$
$\Leftrightarrow x=\log_2(1.920.000.000.000)=\frac{\lg(1.920.000.000.000)}{\lg(2)} \approx 40{,}8 \approx 41$
Das Blatt Papier müsste rd. 41 mal gefaltet werden, damit der entstandene Turm bis zum Mond reicht.

Lösungen zur Aufg. 8:
a) Gesucht: f mit $f(x)=a\cdot b^x$, $b\in IR{-}{>}0$, $b\neq 1$ und $a\in IR_{>0}$
$f(0)=100\% = 1 \Rightarrow f(0)=a\cdot b^0=a\cdot 1=a=1 \Rightarrow a=1$
$f(8)=50\% = 0{,}5 \Rightarrow f(8)=1\cdot b^8=b^8=0{,}5 \Rightarrow b=\sqrt[8]{0{,}5}\approx 0{,}917$
$f(x)\approx 0{,}917^x$

b) Gesucht: Zeitpunkt x mit f(x)=80%=0,8
also $0{,}8=0{,}917^x$
$\Leftrightarrow \log_{0,917}(0{,}8)=x$
$\Leftrightarrow x=\frac{\lg(0{,}8)}{\lg(0{,}917)}\approx 2{,}575$ Nach rd. 2,6 Tagen ist nur noch 80% der Masse vorhanden.

c) Gesucht: Zeitpunkt x mit f(x)=5%=0,05 (Denn wenn 95% zerfallen sind, sind noch 5% übrig)
also $0{,}05=0{,}917^x$
$\Leftrightarrow \log_{0,917}(0{,}05)=x$
$\Leftrightarrow x=\frac{\lg(0{,}05)}{\lg(0{,}917)}\approx 34{,}574$ Nach rd. $34\frac{1}{2}$ Tagen sind 95% der Masse zerfallen.

Lösungen zur Aufg. 9:

a) $\lg(\sqrt{3x-2}) = -1$
$\Leftrightarrow 10^{-1} = \sqrt{3x-2}$
$\Leftrightarrow 0{,}1 = \sqrt{3x-2}$ | $()^2$
$0{,}01 = 3x-2$ | +2
$2{,}01 = 3x$ | :3
$0{,}67 = x$
$\Rightarrow$ **L={0,67}**

b) **Gleichung auflösen**	**Begründung**
$5\cdot\log_b(x)=3\cdot\log_b(12)+\log_b(32)-3\cdot[\log_b(4)+\log_b(3)]$	| []-Klammer auflösen
$\Leftrightarrow 5\cdot\log_b(x)=3\cdot\log_b(12)+\log_b(32)-3\cdot\log_b(4)-3\cdot\log_b(3)]$	| Logarithmusgesetz $r\cdot\log_b(x)=\log_b(x^r)$
$\Leftrightarrow \log_b(x^5)=\log_b(12^3)+\log_b(32)-\log_b(4^3)-\log_b(3^3)$	| Logarithmusgesetz $\log_b(x)+\log_b(y)=\log_b(x\cdot y)$
$\Leftrightarrow \log_b(x^5) = \log_b(\frac{12\cdot12\cdot12\cdot32}{4\cdot4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3})$	| Vereinfachen durch Kürzen
$\Leftrightarrow \log_b(x^5)= \log_b(32)$	| Regel: $\log_b(x)=\log_b(y) \Leftrightarrow x=y$
$\Leftrightarrow x^5 = 32$	| $\sqrt[5]{\ }$
$\Leftrightarrow x=2 \quad\Rightarrow$ **L={2}**	

c) $2^{2x+8} = 4^{4x}$
$\Leftrightarrow 2^{2x+8} = (2^2)^{4x}$
$\Leftrightarrow 2^{2x+8} = 2^{8x}$
$\Leftrightarrow 2x+8=8x$
$\Leftrightarrow 8 = 6x$
$\Leftrightarrow \frac{4}{3}=x$
$\Rightarrow$ **L={$\frac{4}{3}$}**

d) $\lg(2x)+\lg(5) = \lg(30)$
$\Leftrightarrow \lg(2x\cdot5) = \lg(30)$
$\Leftrightarrow \lg(10x) = \lg(30)$
$\Leftrightarrow 10x=30$
$\Leftrightarrow x=3$
$\Rightarrow$ **L={3}**

Lösungen zur Aufg. 10:

a) Forme folgende Wortlaute in eine logarithmische Gleichung um und gib die Lösung an:
– Mit welcher Zahl muss man 7 potenzieren, um 2401 zu erhalten? $\Rightarrow \log_7(2401)=x$; **L={4}**
– Potenziert man eine Zahl mit 5, so erhält man $\frac{32}{243}$. $\Rightarrow \log_b(5)=\frac{32}{243}$; **L={$\frac{2}{3}$}**

b) Welche natürliche Zahl x erfüllt die Gleichung $\log_x(8) = x+1$ (Umformen und probieren)?
$\log_x(8) = x+1 \Leftrightarrow x^{x+1}=8$ Für x=2 ergibt sich $2^{2+1} = 8$, also **L={2}.**

c) Für welches $x\in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $\log_x(256)=x$ (Umformen und probieren)?
$x^x=256 \Leftrightarrow x=4$ **L={4}.**

Lösung zur Aufg. 11:

Fr. Meyer hat einen bestimmten Geldbetrag mit einem festen Zinssatz angelegt. Nach zwei Jahren hat sie 1531,20€ und nach 10 Jahren 2543,10€ auf dem Konto. Bestimme das Anfangskapital und den Zinssatz.

Gesucht: f mit $f(x)=a\cdot b^x$

$f(2)=a\cdot b^2=1531{,}20$

$f(10)=a\cdot b^{10}=2543{,}10$ Gleichsetzen: $\frac{1531{,}2}{b^2}=\frac{2543{,}1}{b^{10}} \Leftrightarrow \frac{b^{10}}{b^2}=\frac{2543{,}1}{1531{,}2} \Leftrightarrow b^8\approx 1{,}66 \Rightarrow b\approx 1{,}065$

$1531{,}2 = a\cdot b^2 = a\cdot 1{,}065^2 \Rightarrow a=\frac{1531{,}2}{1{,}065^2}\approx 1349{,}99\approx 1350$

$f(x)\approx 1350\cdot 1{,}065^x \Rightarrow f(0)=1350 \Rightarrow$ Das Anfangskapital betrug rd. 1350€ und der Zinssatz 6,5%.