

Lösungen: Teilbarkeit natürlicher Zahlen

Lösungen Aufg. 1:

- | | |
|--|--|
| a) $T_{28}=\{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$ | i) $T_{80}=\{1; 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 40; 80\}$ |
| b) $T_{39}=\{1; 3; 13; 39\}$ | j) $T_{83}=\{1; 83\}$ |
| c) $T_{40}=\{1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40\}$ | k) $T_{86}=\{1; 2; 43; 86\}$ |
| d) $T_{50}=\{1; 2; 5; 10; 25; 50\}$ | l) $T_{90}=\{1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 18; 30; 45; 90\}$ |
| e) $T_{60}=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$ | m) $T_{96}=\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 32; 48; 96\}$ |
| f) $T_{66}=\{1; 2; 3; 6; 11; 22; 33; 66\}$ | n) $T_{97}=\{1; 97\}$ |
| g) $T_{67}=\{1; 67\}$ | o) $T_{98}=\{1; 2; 7; 14; 49; 98\}$ |
| h) $T_{78}=\{1; 2; 3; 6; 13; 26; 39; 78\}$ | p) $T_{100}=\{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$ |

Lösungen zur Aufg. 2:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|------------------|---------------------|
| a) 12×112 | b) $37 \mid 407$ | c) $48 \mid 528$ | d) $13 \mid 169$ |
| e) 44×928 | f) 52×250 | g) $99 \mid 990$ | h) 117×444 |

Lösungen zur Aufg. 3:

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a) $12 \mid 120$ | b) $7 \mid 252$ | c) $15 \mid 810$ | d) $22 \mid 440$ |
| e) $17 \mid 136$ | f) $21 \mid 231$ | g) $14 \mid 196$ | h) $67 \mid 670$ |

Lösungen zur Aufg. 4:

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------|
| a) $T_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ | c) $T_{49} = \{1, 7, 49\}$ | e) $T_9 = \{1, 3, 9\}$ |
| b) $T_{35} = \{1, 5, 7, 35\}$ | d) $T_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$ | f) $T_{31} = \{1, 31\}$ |

Lösungen zur Aufg. 5:

- | | |
|--|---|
| a) $V_9=\{9; 18; 27; 36; 45; \dots\}$ | b) $V_{18}=\{18; 38; 54; 72; 90; \dots\}$ |
| c) $V_{22}=\{22; 44; 66; 88; 110; \dots\}$ | d) $V_6=\{6; 12; 18; 24; 30; \dots\}$ |

Lösungen zur Aufg. 6:

- a) A ist die Teilermenge von 6.
- b) B ist die Teilermenge von 12.
- c) C ist keine Teilermenge, denn es müsste die Teilermenge von 3 sein, aber die Zahl 2 ist in der Menge C enthalten und 2 teilt nicht 3.
- d) D kann schon deshalb keine Teilermenge sein, weil die Zahl 1 fehlt. Außerdem fehlt noch die Zahl 2, falls es die Teilermenge von 24 sein sollte.
- e) E ist nicht die Teilermenge von 15, denn der Teiler 3 fehlt.
- f) F ist keine Teilermenge, denn es müsste die Teilermenge von 5 sein, aber die Zahlen 2; 3 und 4 sind in der Menge F enthalten und sie teilen nicht die Primzahl 5.

Lösung zur Aufg. 7:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Lösung zur Aufg. 8:

150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
160	161	162	163	164	165	166	167	168	169
170	171	172	173	174	175	176	177	178	179
180	181	182	183	184	185	186	187	188	189
190	191	192	193	194	195	196	197	198	199

ein paar Tipps:

$3 \mid 153; 3 \mid 159; 7 \mid 161; 13 \mid 169; 3 \mid 171; 3 \mid 177; 3 \mid 183; 11 \mid 187; 3 \mid 189$
Die letzte Primzahl, mit der ihr die Zahlen im Sieb auf Teilbarkeit überprüft, ist die Zahl 13, denn $13 \cdot 13 = 169$ und $169 < 200$ und $17 \cdot 17 = 289$ und $289 > 200$.

Lösungen zur Aufg. 9:

$$\begin{array}{llllll}
 27 = 3^3 & 63 = 3^2 \cdot 7 & 73 = 73 & 76 = 2^2 \cdot 19 & 91 = 7 \cdot 13 & 96 = 2^5 \cdot 3 \\
 54 = 2 \cdot 3^3 & 64 = 2^6 & 74 = 2 \cdot 37 & 80 = 2^4 \cdot 5 & 92 = 2^2 \cdot 23 & 100 = 2^2 \cdot 5^2 \\
 61 = 61 & 72 = 2^3 \cdot 3^2 & 75 = 3 \cdot 5^2 & 81 = 3^4 & 93 = 3 \cdot 31 & 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7
 \end{array}$$

Lösungen zur Aufg. 10:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \text{kgV}(7;17) = 119 & \text{d) } \text{kgV}(5;65) = 65 & \text{g) } \text{kgV}(34;17) = 34 & \text{j) } \text{kgV}(a;b)=a \cdot b \\
 \text{b) } \text{kgV}(2;6;3) = 6 & \text{e) } \text{kgV}(2;3;8) = 24 & \text{h) } \text{kgV}(78;12) = 156 & \\
 \text{c) } \text{kgV}(4;5) = 20 & \text{f) } \text{kgV}(45;35) = 315 & \text{i) } \text{kgV}(4;9;45) = 180 &
 \end{array}$$

Lösungen zur Aufgabe 11:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \text{ggT}(12;45) = 3 & \text{e) } \text{ggT}(28;34;6) = 2 & \text{i) } \text{ggT}(23;123) = 1 \\
 \text{b) } \text{ggT}(56;18) = 2 & \text{f) } \text{ggT}(36;72;30) = 6 & \text{j) } \text{ggT}(88;121) = 11 \\
 \text{c) } \text{ggT}(17;95) = 1 & \text{g) } \text{ggT}(100;200;30) = 10 & \text{k) } \text{ggT}(90;315) = 45 \\
 \text{d) } \text{ggT}(13;65) = 13 & \text{h) } \text{ggT}(99;45) = 9 & \text{l) } \text{ggT}(a;b)=1
 \end{array}$$

Lösung zur Aufg. 12:

	2	3	5	8	9	10	25
125	✗	✗	25	✗	✗	✗	5
120	60	40	24	15	✗	12	✗
1.457	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
12.375	✗	4125	2475	✗	1375	✗	495
45.104	22552	✗	✗	5638	✗	✗	✗
42.874	21437	✗	✗	✗	✗	✗	✗
22.933	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
18.000	9000	6000	3600	2250	2000	1800	720

Lösungen zur Aufg. 13:

a) Bei dieser Rechenoperation handelt es sich um eine Division, der Ausdruck $143:13$ ist ein Quotient, die Zahl 143 der Dividend und die Zahl 13 der Divisor.

$$\begin{array}{lll}
 \text{b) } 14 \mid 280.140 & \text{denn } 280140=280.000+140 & \text{und } 14 \mid 280.000 \text{ und } 14 \mid 140 \\
 15 \nmid 4.576 & \text{denn } 4.576=4500+76 & \text{und } 15 \mid 4500 \text{ aber } 15 \nmid 76 \\
 28 \mid 56.280 & \text{denn } 56.280=56.000+280 & \text{und } 28 \mid 56.000 \text{ und } 28 \mid 280 \\
 17 \mid 510.680 & \text{denn } 510.680=510.000+680 & \text{und } 17 \mid 510.000 \text{ und } 17 \mid 680 \\
 11 \nmid 224.475 & \text{denn } 224.475=220.00+4.400+75 & \text{und } 11 \mid 220.000 \text{ und } 11 \mid 4.400 \text{ aber } 11 \nmid 75 \\
 19 \mid 381.900 & \text{denn } 381.900= 380.000+1900 & \text{und } 19 \mid 380.000 \text{ und } 19 \mid 1900 \\
 7 \nmid 70.076 & \text{denn } 70.076=70.000+76 & \text{und } 7 \mid 70.000 \text{ aber } 7 \nmid 76 \\
 91 \mid 182.273 & \text{denn } 182273=182.000+273 & \text{und } 91 \mid 182.000 \text{ und } 91 \mid 273
 \end{array}$$

Lösungen zur Aufg. 14:

- a) Die Aussage ist wahr.
- b) Die Aussage ist wahr.
- c) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $3 \mid 6$ und $2 \mid 6$, aber $(3+2) \nmid 6$.
- d) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $6 \mid 12$ und $4 \mid 12$, aber $(6 \cdot 4) \nmid 12$.
- e) Die Aussage ist wahr.
- f) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $3 \mid 6$ und $2 \mid 8$, aber $(3 \cdot 2) \nmid (6+8)$, denn $6 \nmid 14$.

- g) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $3|6$ und $2|4$, aber $(3+2) \nmid (6 \cdot 4)$, denn $5 \nmid 24$.
- i) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $3|6$ aber $3^2 \nmid 6$, denn $9 \nmid 6$.
- j) Die Aussage ist wahr.
- k) Die Aussage ist wahr.
- l) Die Aussage ist wahr.
- m) Die Aussage ist falsch, denn wenn $a=b$ ist, gilt $a|b$ und $b|a$ für alle natürlichen Zahlen.

Lösungen zur Aufg. 15: – Vermischte Wiederholungsaufgaben

a) Die Mengen A und B sind Teilmengen, A ist T_6 , B ist T_{12} . Die Menge C kann keine Teilmenge sein, da $1 \cdot 3 = 3$, aber 2 teilt nicht 3. Bei D fehlt in der Menge die Zahl 1 (denn 1 teilt jede Zahl!) und bei F fehlt die 3, damit sie die Teilermenge von 15 sein könnte.

b)

a	12	42	42	165	168	170	209	220	224	284	288
b	8	27	28	75	48	102	19	154	14	48	32
ggT(a;b)	4	3	14	15	24	34	19	22	14	4	32
kgV(a;b)	24	378	84	825	336	510	209	1540	224	3408	288

c) Rechnung: $T_{48} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$ $T_{32} = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$ $T_{52} = \{1; 2; 4; 13; 26; 52\}$
 Da bei einem Würfel alle Seiten (Kanten) gleich lang sind, muss die Maßzahl der Seitenlänge des Würfels alle drei Maßzahlen der Seitenlängen des Quaders teilen. Also muss diese Zahl der größte gemeinsame Teiler aller drei Maßzahlen sein. Der größte gemeinsame Teiler ist 4. Die Würfel haben die Kantenlänge 4 cm.

Volumen des Quaders: $V = 48\text{cm} \cdot 52\text{cm} \cdot 32\text{cm} = 79.872 \text{ cm}^3$

Volumen des Würfels: $79872 : 64 = 1248 \text{ cm}^3$

Antwort: Es werden **1248 Würfel** benötigt.

- d) (1) $\text{ggT}(46;161)=23$ (2) $\text{ggT}(78;208)=26$ (3) $\text{ggT}(96;152)=8$
 (4) $\text{ggT}(72;168)=24$ (5) $\text{ggT}(360;2100)=60$

- e) (1) z. B $c=6$. (allgemein: c muss ein Vielfaches von 6 sein)
 (2) $\text{ggT}(a;b)=a$ (Die Primfaktorzerlegung von b unterscheidet sich von der Primfaktorzerlegung von a nur um den Faktor 3, also haben a und b alle Primfaktoren von a gemeinsam)