Lösungen zu: Aufstellen von Funktionsgleichungen

Lösung zur Aufg. 1:

Gegeben sei eine quadratische Funktion f, deren Graph durch den Punkt P(0|–2) verläuft und die im Punkt $(-\frac{1}{3}|-2\frac{1}{3})$ ein Extremum besitzt. Stellen Sie die Funktionsgleichung von f auf.

Gesucht: $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $f(x)=ax^2+bx+c$

Da P(0|–2) zum Graphen von f gehört, gilt $f(0)=c=-2$. Also $f(x)=ax^2+bx-2$

$f'(x)=2ax+b$ und $f'(-\frac{1}{3})=2a(-\frac{1}{3})+b=-\frac{2}{3}a+b=0$ $\boxed{\text{I: } -\frac{2}{3}a+b=0}$ $\Rightarrow b=\frac{2}{3}a$

$E(-\frac{1}{3}|-2\frac{1}{3})$ gehört zu f, also $f(-\frac{1}{3})=a(-\frac{1}{3})^2+b(-\frac{1}{3})-2 = \frac{1}{9}a-\frac{1}{3}b-2=-2\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{9}a-\frac{1}{3}b=-\frac{1}{3} \quad \text{(II)}}$

I in II: $\frac{1}{9}a-\frac{1}{3}(\frac{2}{3}a)=-\frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{9}a-\frac{2}{9}a=-\frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{9}a=-\frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow a=3$

a=3 in I: $b=\frac{2}{3}\cdot 3=2$

Die gesuchte Funktionsgleichung von f lautet: $f(x)=3x^2+2x-2$

Lösung zur Aufg. 2:

Gegeben sei eine Parabel, die durch die Punkte $P_1(2|6)$; $P_2(-2|2)$ und $P_3(1|3{,}5)$ verläuft. Stellen Sie die zugehörige Funktionsgleichung auf.

Gesucht: $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $f(x)=ax^2+bx+c$

aus $P_1(2|6)$ folgt: $f(2)=$ $\boxed{4a+2b+c=6}$ Gleichung I

aus $P_2(-2|2)$ folgt: $f(-2)=$ $\boxed{4a-2b+c=2}$ Gleichung II

aus $P_3(1|3{,}5)$ folgt: $f(1)=$ $\boxed{a+b+c=3{,}5}$ Gleichung III

I–II: $4a+2b+c=6$

$\underline{4a-2b+c=2}$

$4b \quad =4 \quad \Rightarrow b=1$

b=1 in III: $a+1+c=3{,}5 \quad \Rightarrow a+c=2{,}5$

b=1 in II: $4a-2+c=2 \quad \Rightarrow 4a+c=4$

II–III : $4a+c=4$

$\underline{a+c=2{,}5}$

$3a = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad a=0{,}5$

a=0,5 und b=1 in III: $0{,}5+1+c=3{,}5 \Rightarrow c=2$

Die gesuchte Funktionsgleichung von f lautet: $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+2$

Lösung zur Aufg. 3:

Gegeben sei eine quadratische Funktion mit der Nullstelle $x_N=-1$ und dem Tiefpunkt T(1|-28). Stellen Sie die zugehörige Funktionsgleichung auf.

Gesucht: $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $f(x)=ax^2+bx+c$

aus Tiefpunkt bei x=1 folgt: $f'(x)=2ax+b$ und somit $f'(1)=$ $\boxed{0=2a+b}$ Gleichung I

aus T(1|-28) folgt weiter: $f(1)=$ $\boxed{a+b+c=-28}$ Gleichung II

aus der Nullstelle $x_N=-1$ folgt: $f(-1)=$ $\boxed{a-b+c=0}$ Gleichung III

$(-1)\cdot$II : $-a-b-c=28$

III: $\underline{\quad a-b-+c=0}$

$+ \qquad -2b = 28 \Rightarrow b=-14$

b=–14 in I: $0=2a-14 \Rightarrow 2a=14 \Rightarrow a=7$

b=–14 und a=7 in III: $7-14+c=-28 \Rightarrow c=-21$

Die gesuchte Funktionsgleichung von f lautet: $f(x)=7x^2-14x-21$

Lösung zur Aufg. 4:

Gegeben sei eine Polynomfunktion 3. Grades, deren Graph im Ursprung einen Wendepunkt besitzt und durch den Punkt $P(1|-1\frac{1}{2})$ verläuft. Die Tangente an den Graphen bei x=2 hat die Steigung 4.

Gesucht: $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Graph verläuft durch den Ursprung: $f(0)=0=d \quad \Rightarrow d=0 \quad \Rightarrow f(x)=ax^3+bx^2+cx$

$f`(x)=3ax^2+2bx+c$

$f``(x)=6ax+2b$

WP bei x=0: $f``(0)=6a\cdot 0+2b=2b=0 \Rightarrow b=0 \quad \Rightarrow f(x)=ax^3+cx$

$f`(x)=3ax^2+c$

Tangentensteigung 4 bei x=2: $f`(2)=3a\cdot 2^2+c=$ $\boxed{12a+c=4}$ Gleichung I

$P(1|-1\frac{1}{2})$ gehört zu f: $f(1)=a\cdot 1^3+c\cdot 1=$ $\boxed{a+c=-1\frac{1}{2}}$ Gleichung II

$(-1)\cdot$II: $-a-c=1\frac{1}{2}$

$+$ I: $\underline{12a+c=4}$

$11a = 5\frac{1}{2} \quad \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$ in I: $12\cdot\frac{1}{2}+c=4 \quad \Rightarrow c=-2$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x)=\frac{1}{2}x^3-2x$

Lösung zur Aufg. 5:

Information über die gesuchte Funktion f/ den zugehörigen Graphen der Funktion f	**Verwendung dieser Information in formalisierter Form zum Aufstellen der Gleichung von f**
Der Punkt $P(x_0\|y_0)$ gehört zum Graphen von f.	$f(x_0) = y_0$
Die Funktion hat an der Stelle x_E ein Extremum.	**$f`(x_E) = 0$**
Der Graph schneidet die y-Achse bei y.	**$f(0) = y_A = y$ (y_A ist y-Achsenabschnitt)**
Die Funktion hat an der Stelle x_E einen Wendepunkt.	**$f``(x_w) = 0$**
Die Funktion besitzt die Nullstelle x_N.	**$f(x_N) = 0$**
Der Graph verläuft durch den Ursprung.	**$f(0) = 0 \Rightarrow$ y-Achsenabschnitt $y_A=0$**
Die achsensymmetr. Funktion f verläuft durch den Punkt (2|6).	**$f(2) = 6$ und $f(-2) = 6$**
An der Stelle x_0 hat der Graph die Steigung m.	**$f`(x_0) = m$**
Die punktsymmetrische Funktion f verläuft durch den Punkt (3|5).	**$f(3) = 5$ und $f(-3) = -5$**
Der Graph ändert an der Stelle x_0 sein Krümmungsverhalten.	**$f``(x_0) = 0$**

Lösung zur Aufg. 6:

Eine achsensymmetrische Polynomfunktion 4. Grades, die die Nullstellen $x_{N1}=1$ und $x_{N''}=-2$ besitzt, hat einen Hochpunkt in H(0|4). Stellen Sie die zugehörige Funktionsgleichung auf.

Gesucht: $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$ mit $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

(0|4) gehört zu f: $f(0)=e=4 \quad \Rightarrow \quad f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+4$

$f`(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ H(0|4) $\Rightarrow f`(0)=4a\cdot 0^3+3b0^2+2c\cdot 0+d = d = 0 \quad \Rightarrow f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+4$

Wegen der Achsensymmetrie gilt: x=1 und x=–1 sowie x=2 und x=–2 sind Nullstellen.

$f(1)= a+b+c+4=0$ (Gleichung I) $\qquad f(2)= 16a+8b+4c+4=0$ (Gleichung IV)

$f(-1)= \underline{a-b+c+4=0}$ (Gleichung II) $\qquad f(-2)= \underline{16a-8b+4c+4=0}$ (Gleichung V)

I+II: $2a+2c+8=0$ $\qquad$ IV+V: $32a+8c+8=0$

$\Leftrightarrow a+c+4=0$ (Gleichung III) $\qquad \Leftrightarrow 4a+c+1=0$ (Gleichung VI)

$(-4)\cdot$III $-4a-4c-16=0$

VI $\underline{4a+c+1=0}$

III+VI: $-3c-15=0 \quad \Rightarrow c=-5 \quad \Rightarrow c=-5$ in VI: $4a-5+1=0 \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow a=1$

a=1 und c=–5 in I: $1+b-5+4=0 \Rightarrow b=0$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x)=x^4-5x^2+4$