Lösung zur Aufgabe 1:

1. Analyse der Aufgabe:

Die Zahl 10 soll zerlegt werden in $10=x+y$
und es soll gelten, dass x^2+y^2 minimal ist.

2. Zielfunktion aufstellen:

$f(x)= x^2 + y^2$

3. Nebenbedingungen:

$10 = x + y \Rightarrow y = 10-x$

4. Einsetzen NB in ZF:

$f(x)=x^2+y^2 = x^2 + (10-x)^2 = x^2+100-20x+x^2$
$= 2x^2-20x+100$

5. Definitionsmenge:

D_f=IR Es kann auch die Summe von negativen Zahlen sein, z. B. $10 = 15 + (-5)$

6. Ableitungen der ZF:

$f`(x)=4x-20$
$f``(x)=4$

7. Extrema bestimmen:

$f`(x)=0$
$\Leftrightarrow 4x-20 = 0$
$\Leftrightarrow 4x = 20$
$\Leftrightarrow x = 5$
$f``(5)=4>0 \Rightarrow$ Minimum bei $x=5$

8. Werte bestimmen:

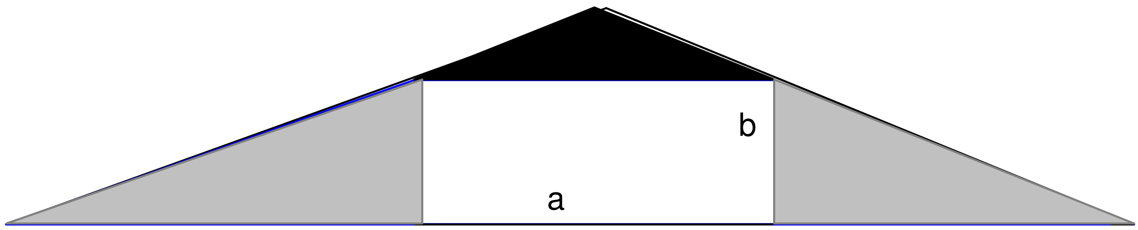
$y=10-x=10-5=5$

$5^2+5^2 = 50$

Die Summe der Quadrate wird mit 50 bei $x=y=5$ minimal.

Lösung zur Aufgabe 2:

Hier ist eine Skizze sinnvoll:



Das **R**echteck habe den Flächeninhalt $A_R = a\cdot b$
Das **D**reieck hat den Flächeninhalt $A_D=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48$
Das Ausgangsdreieck setzt sich zusammen aus dem Rechteck, dem schwarze Dreieck und dem Dreieck, das entsteht, wenn wir die beiden grauen Dreiecke zusammenschieben (also das Rechteck weglassen).
Das schwarze Dreieck hat die Höhe $8-b$ und somit den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\cdot a\cdot(8-b)$
Das graue zusammengeschoben Dreieck hat die Grundseitenlänge $12-a$ und die Höhe b, also den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\cdot(12-a)\cdot b$

1. Analyse der Aufgabe:

siehe oben

2. Zielfunktion aufstellen:

$f(a)=a\cdot b$

3. Nebenbedingungen:

$$48 = \underbrace{a\cdot b}_{\text{(Rechteck}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot(8-b)}_{\text{schwarzes Dreieck}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot(12-a)\cdot b}_{\text{graues Dreiecke)}}$$

$$= a\cdot b + 4a - \tfrac{1}{2}ab + 6b - \tfrac{1}{2}ab = 4a + 6b$$

also : $48 = 4a + 6b \Rightarrow 6\cdot b = 48 - 4a$

$\Rightarrow b = 8-\frac{2}{3}a$

4. Einsetzen NB in ZF:

$f(a)=a\cdot b = a\cdot(8\cdot-\frac{2}{3}a) = 8a-\frac{2}{3}a^2$

5. Definitionsmenge:

$D_f=\{a\in IR: 0<a<12\}$

6. Ableitungen der ZF:

$f`(a)=8-\frac{4}{3}a$

$f``(a)=-\frac{4}{3}$

7. Extrema bestimmen:

$f`(a)=0$

$\Leftrightarrow 8-\frac{4}{3}a = 0$

$\Leftrightarrow 8 = \frac{4}{3}a$

$\Leftrightarrow 6 = a$

$f``(6)=-\frac{4}{3}<0 \Rightarrow$ Maximum bei a=6

8. Werte bestimmen:

$b= 8-\frac{2}{3}a = 8-\frac{2}{3}\cdot 6 = 8-4 = 4$

$A_R=a\cdot b=4\cdot 6=24$

Das Rechteck hat den maximalen Inhalt von 24 FE.

Lösung zur Aufgabe 3:

1. Analyse der Aufgabe:

Dreieck mit der Grundseite $2\cdot\sqrt{3}$ LE und der Höhe $f(x_c)$, wobei x_c gesucht wird. Der Flächeninhalt des Dreiecks soll maximal werden.

2. Zielfunktion aufstellen:

$A=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot h \Rightarrow A(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot f(x)$

3. Nebenbedingungen:

$h=f(x_s)= \frac{1}{2}\cdot x^4-3\cdot x^2+\frac{9}{2}$

4. Einsetzen NB in ZF:

$A(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot h = \sqrt{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot x^4-3\cdot x^2+\frac{9}{2})$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}x^4 - 3\sqrt{3}x^2 + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

5. Definitionsmenge:

$D_f=\{x\in IR: -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\}$

6. Ableitungen der ZF:

$A`(x)= 2\sqrt{3}\cdot x^3 - 6\sqrt{3}\cdot x = 2\sqrt{3}\cdot x\cdot(x^2-3)$

$A``(x)= 6\sqrt{3}\cdot x^2 - 6\sqrt{3}$

7. Extrema bestimmen:

$A`(x)=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cdot x\cdot(x^2-3)$

$\Leftrightarrow x_1=0$ oder $x_2=\sqrt{3}$ oder $x_3=-\sqrt{3}$

Da $x_2\notin D_A$ und $x_3\notin D_A$ muss nur x_1 überprüft werden.

$A``(0)= 6\sqrt{3}\cdot 0^2 - 6\sqrt{3} = -6\sqrt{3} <0 \Rightarrow$ Maximum bei x=0.

8. Werte bestimmen:

$A=\frac{9}{2}\cdot\sqrt{3}\approx 7{,}79$ und $f(0)=4{,}5$ Das Dreieck hat den maximalen Flächeninhalt von ca. 7,79 FE, wenn der dritte Punkt C(0|4,5) ist.

Lösung zur Aufgabe 4:

1. Analyse der Aufgabe:

gegeben: Umfang U= 10 m
gesucht: Höhe des Grabstein, d.h. Summe aus Höhe Rechteck und Radius des Kreises.

2. Zielfunktion aufstellen:

$h(r)= a\cdot b + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 = 2\cdot r\cdot b + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2$

3. Nebenbedingungen:

$U=10=a+2b+\pi\cdot r = 2\cdot r+2\cdot b+\pi\cdot r$;
also $2\cdot r+2\cdot b+\pi\cdot r = 10$
$\Rightarrow 2\cdot b = 10-2\cdot r-\pi\cdot r$
$\Rightarrow b = 5-r-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r\approx 5-2{,}57\cdot r$

4. Einsetzen NB in ZF:

$h(r)= 2\cdot r\cdot b + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 = 2\cdot r\cdot(5-2{,}57\cdot r) + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2$
$= 10\cdot r-5{,}14\cdot r^2+ \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 = 10\cdot r-3{,}57\cdot r^2$

5. Definitionsmenge:

$D_f=\{r\in \mathbb{R}: 0<r<\frac{10}{\pi+2}\}$ (denn selbst wenn das Rechteck verschwindet, gilt $U=10=2\cdot r+\pi\cdot r =r\cdot(2+\pi)$ (Umfang eines Halbkreises)

6. Ableitungen der ZF:

$f`(r)= 10-7{,}14\cdot r$
$f``(r)=-7{,}14$

7. Extrema bestimmen:

$f`(r)=0$
$\Leftrightarrow -7{,}14\cdot r+10 = 0$
$\Leftrightarrow -7{,}14\cdot r = -10$
$\Leftrightarrow r \approx 1{,}4$

$f``(1{,}4)=-7{,}14<0 \Rightarrow$ Extremstelle bei x=1,4 (Maximum)

8. Werte bestimmen:

$b \approx 5-2{,}57\cdot r = 5-2{,}57\cdot 1{,}4\approx 1{,}4$
$h(r)= 2\cdot r\cdot b + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2$
$h(1{,}4)=2\cdot 1{,}4\cdot 1{,}4+1{,}57\cdot 1{,}4^2=6{,}99$

Der maximale Flächeninhalt beträgt rd. 7 m^2.

Lösung zur Aufgabe 5:

1. Analyse der Aufgabe:

geg.: $V=1000cm^3$
Verpackung ist ein Quader mit quadratischer Grundseite, die Oberfläche soll minimal sein
ges.: Oberfläche minimiert

2. Zielfunktion aufstellen:

$O=f(a)=2\cdot a\cdot a + 4\cdot a\cdot b= 2\cdot a^2+4ab$

3. Nebenbedingungen:

$V=1000 = a\cdot a\cdot b = a^2\cdot b \Rightarrow b=\frac{1000}{a^2}$

4. Einsetzen NB in ZF

$f(a)= 2\cdot a^2+4ab = 2\cdot a^2+4a\cdot \frac{1000}{a^2} = 2a^2+4000a^{-1}$

5. Definitionsmenge:

$D_f=\mathbb{R}_{>0}$

6. Ableitungen der ZF:

$f`(a)= 4a-4000a^{-2}$
$f``(a)= 4+8000a^{-3}$

7. Extrema bestimmen:

$f`(a)=0$
$\Leftrightarrow 0=4a-4000a^{-2}$ I(:4)
$\Leftrightarrow 0=a-1000a^{-2}$ I(+1000 a^{-2})
$\Leftrightarrow 1000a^{-2} = a$ I ($\cdot a^2$)
$\Leftrightarrow 1000 = a^3$ I$\sqrt[3]{\ }$
$\Leftrightarrow 10 = a$

$f``(10)= 4+8000\cdot 10^{-3} = 12>0 \Rightarrow$ Minimum bei a=10

8. Werte bestimmen:

$b= \frac{1000}{a^2}=10$ und $O=2\cdot a^2+4ab =600$
Die Verpackung hat als Würfel mit der Kantenlänge 10 cm die kleinste Oberfläche mit $O=600cm^2$.

Lösung zur Aufgabe 6:

1. Analyse der Aufgabe:

Geg.: Funktion f mit $f(x)=-0{,}4x+2$ Rechteck mit Ursprung als Eckpunkt A, zwei Seiten auf den Achsen, Punkt C auf dem Graphen von f.
ges.: x-Koordinate von C

2. Zielfunktion aufstellen:

$A=g(x)=x\cdot f(x)$

3. Nebenbedingungen:

$f(x) = -0{,}4x+2$

4. Einsetzen NB in ZF

$g(x)= x\cdot f(x)=x\cdot(-0{,}4x+2) = -0{,}4x^2+2x$

5. Definitionsmenge:

$D_f=\{x\in \mathbb{R}: 0<x<5\}$
(Da 5 die Nullstelle von f)

6. Ableitungen der ZF:

$f`(x)= -0{,}8x+2$
$f``(x)= -0{,}8$

7. Extrema bestimmen:

$f`(x)=0$
$\Leftrightarrow 0=-0{,}8x+2 \quad |(+0{,}8x)$
$\Leftrightarrow 0{,}8x=2 \quad |(:0{,}8)$
$\Leftrightarrow x= 2{,}5$

$f``(2{,}5)= -0{,}8 <0 \Rightarrow$ Maximum bei $x=2{,}5$

8. Werte bestimmen:

$f(2{,}5)=1$ $C(2{,}5|1)$
$A=x\cdot f(x)=2{,}5\cdot 1=2{,}5$

Das Rechteck mit dem Punkt $C(2{,}5|1)$ hat einen Flächeninhalt von 2,5 FE.