Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben: Lagebeziehungen von Geraden im Raum

a) Gegeben: Geraden g und h im Raum: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t_g;t_h \in IR$

Überprüfung auf Parallelität:

g $\nparallel$ h, denn es ex. kein r∈IR mit $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Überprüfung auf Schnitt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatenvergleich:

I) $2+t_g = 3-t_h$
II) $1 = 4+4\cdot t_h \Rightarrow -3=4\cdot t_h \Rightarrow t_h=-\frac{3}{4}$
III) $5+3\cdot t_g = 2+t_h$

$t_h=-\frac{3}{4}$ in I): $2+t_g = 3-(-\frac{3}{4}) \Leftrightarrow 2+t_g = 3\frac{3}{4} \Leftrightarrow t_g = 3\frac{3}{4}-2 = 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

t_h und t_g in III):

$5+3\cdot\frac{7}{4} \neq 2+(-\frac{3}{4})$

Widerspruch, t_h und t_g erfüllten nicht die Gleichung III) $\Rightarrow$ g und h sind zueinander windschief

b) Gegeben: Geraden g und h im Raum: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $t_g;t_h \in IR$

Überprüfung auf Parallelität:

g $\nparallel$ h, denn es ex. kein r∈IR mit $r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Überprüfung auf Schnitt:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koordinatenvergleich:

I) $7+2\cdot t_g = 4+t_h$
II) $-2+3\cdot t_g = -6+t_h$
III) $2+t_g = -1+2\cdot t_h$

I) $t_h=7+2\cdot t_g-4 = 3+2\cdot t_g$
t_h in II): $-2+3t_g = -6+(3+2\cdot t_g) \Leftrightarrow -2+3\cdot t_g = -3+2\cdot t_g \Leftrightarrow t_g = -1$
$t_h= -1$ in I): $t_h=3+2\cdot(-1)= 1$
$t_h=1$ und $t_g=-1$ in III):
$2+(-1) = -1+2\cdot 1 \Leftrightarrow 1=1 \Rightarrow$ t_g und t_h erfüllen die Gleichung III) $\Rightarrow$ Es ex. ein Schnittpunkt von g und h.

$t_h=1 \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Der Schnittpunkt von g und h ist S(5|-5|1).

[Zur eigenen Kontrolle: $t_g=-1 \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ S(5|-5|1)]

c) Gegeben: Geraden g und h im Raum: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ $t_g;t_h \in$ IR

<u>Überprüfung auf Parallelität:</u>

g || h, denn für r=-2 gilt: $(-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

<u>Punktprobe:</u> [Liegt (1|0|3) auf g? Auch möglich: Liegt (7|-2|2) auf h]

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Koordinatenvergleich:</u>

I) $1=7+2 \cdot t_g \quad \Rightarrow t_g = -3$

II) $0=-2+3 \cdot t_g \quad \Rightarrow t_g = -\frac{2}{3}$

III) $3=2+t_g \quad \Rightarrow t_g = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ Es existiert kein $t_g \in$ IR, das alle Gleichungen erfüllt. $\Rightarrow$ (1|0|3)$\notin$ g

$\Rightarrow$ g und h sind zueinander parallel, aber nicht identisch.

d) Gegeben: Geraden g und h im Raum: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $t_g;t_h \in$ IR

<u>Überprüfung auf Parallelität:</u>

g || h, denn für $r=-\frac{1}{4}$ gilt: $(-\frac{1}{4}) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Punktprobe:</u> [Liegt (3|2|–1) auf h? Auch möglich: Liegt (1|3|1) auf g]

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

<u>Koordinatenvergleich:</u>

I) $3 = 1+4 \cdot t_h \quad \Rightarrow t_h = 0{,}5$

II) $2 = 3-2 \cdot t_h \quad \Rightarrow t_h = 0{,}5$

III) $-1 = 1-4 \cdot t_h \quad \Rightarrow t_h = 0{,}5$

$\Rightarrow$ Es existiert mit $t_h = 0{,}5$ genau ein $t_h \in$ IR, das alle Gleichungen erfüllt. $\Rightarrow$ (3|2|–1)$\in$ h

$\Rightarrow$ g und h sind identisch, g=h