Grundlagen Analytische Geometrie: Lösungen

Aufgabe 1

a) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix}7\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-10\\1\\-6\end{pmatrix}$

b) $|\vec{a}|=\sqrt{7^2+0^2+4^2}=\sqrt{65}$ $\quad|\vec{b}|=\sqrt{14}$ $\quad|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{21}$ $\quad|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{137}$

c) $r\cdot\vec{a}=3\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\0\\12\end{pmatrix}$ $\quad\vec{b}\cdot s=\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot(-5)=\begin{pmatrix}15\\-5\\10\end{pmatrix}$ $\quad s\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\begin{pmatrix}-50\\5\\-30\end{pmatrix}$ $\quad r(\vec{a}+\vec{b})=\begin{pmatrix}12\\3\\6\end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

a) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ $\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}$

$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$ $\Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$

$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}=\begin{pmatrix}-10\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow |\overrightarrow{CA}|=\sqrt{100}=10$

$|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{BC}|$; $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|$

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, jedoch nicht gleichseitig.

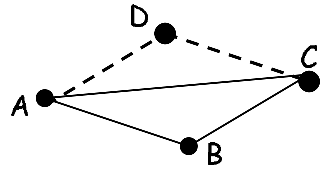
b) M_1 sei Mittelpunkt der Strecke AB und M_2 sei Mittelpunkt der Strecke BC.

$\overrightarrow{m_1}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-8\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$ $\Rightarrow M_1(0|-5)$

$\overrightarrow{m_2}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}10\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$ $\Rightarrow M_2(5|-5)$

Die gesuchten Mittelpunkte sind $M_1(0|-5)$ und $M_2(5|-5)$.

c) Skizze erforderlich!



Es sei D(x|y) der gesuchte Punkt

Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und weiter $\overrightarrow{DC}=\vec{c}-\vec{d}$ also

$\overrightarrow{AB}=\vec{c}-\vec{d}$

$\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

also muss gelten: 2 = 9-x und -6 = -2-y , daraus folgt: x= 7 und y = 4 also $\vec{d}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$

Der gesuchte Punkt ist D(7|4).

Aufgabe 3:

a) $\frac{1}{2}\vec{a}=\vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{a}\,||\,\vec{b}$ $\vec{a}\nparallel\vec{c}$ und $\vec{b}\nparallel\vec{c}$ da kein $r\in\mathbb{R}$ existiert mit $r\cdot\vec{a}=\vec{c}$ bzw. $r\cdot\vec{b}=\vec{c}$

b) $\frac{3}{2}\vec{x}=\vec{y} \;\Rightarrow\; \vec{x}\,||\,\vec{y}$ $\vec{x}\nparallel\vec{z}$ und $\vec{y}\nparallel\vec{z}$ Begründung wie bei a) [Vorzeichen beachten!!!!]

c) Mit $3\cdot\vec{a}=\vec{b}$ folgt r = 6 und s = 3. Außerdem gilt dann $\frac{1}{2}\vec{a}=\vec{d}$ und $\frac{1}{6}\vec{b}=\vec{d}$

Mit $-\frac{1}{4}\vec{c}=\vec{d}$ folgt t=-2 und u=-6   Außerdem gilt dann $-2\vec{a}=\vec{c}$ und $-\frac{2}{3}\vec{b}=\vec{c}$

Mit den Parametern r=6, s=3; t=-2 und u=-2 sind die angegebenen Vektoren zueinander parallel.