Lösungen zu: Nullstellen, Extrema, Wendepunkte

Lösungen zur Aufg. 1:

a) Nullstellen: $x_1= 3$ und $x_2= -4$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(3|0)$ $N_2(-4|0)$
Schnittpunkte mit der y-Achse: $Y(0|-12)$

b) Nullstellen: $x_1= 5$ (doppelte Nullstelle)
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N(5|0)$ (Berührpunkt)
Schnittpunkte mit der y-Achse: $Y(0|25)$

c) $f(x)= x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1)$
Nullstellen: $x_1= 0$ und $x_2= 1$ (doppelte Nullstelle bei x_2)
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0|0)$ $N_2(1|0)$ (N_2 ist Berührpunkt)
Schnittpunkte mit der y-Achse: $Y(0|0)$

d) $f(x)= x^4+6x^3+9x^2 = x^2(x^2+6x+9)$
Nullstellen: $x_1= 0$ und $x_2= -3$ (doppelte Nullstelle bei x_1 und x_2)
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0|0)$ $N_2(-3|0)$ (beides Berührpunkte)
Schnittpunkte mit der y-Achse: $Y(0|0)$

e) Nullstellen: $x_1= \sqrt{7}$ und $x_2= -\sqrt{7}$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(\sqrt{7}|0)$ $N_2(-\sqrt{7}|0)$
Schnittpunkte mit der y-Achse: $Y(0|-7)$

f) $f(x)= x^4-13x^2+36 \Rightarrow$ Substitution mit $z=x^2 \Rightarrow f(z)=z^2-13z+36$
$z_1=4$ und $z_2=9 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{4}$ und $x_{3,4}=\pm\sqrt{9}$
Nullstellen: $x_1= -2$ und $x_2= 2$ und $x_3= -3$ und $x_4= 3$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(-2|0)$ $N_2(2|0)$ $N_3(-3|0)$ $N_4(3|0)$
Schnittpunkte mit der y-Achse: $Y(0|36)$

g) Nullstellen: $x_1= \sqrt{18}$ und $x_2= -\sqrt{2}$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(\sqrt{18}|0)$ $N_2(-\sqrt{2}|0)$
Schnittpunkte mit der y-Achse: $Y(0|-6)$

Lösungen zur Aufg. 2:

a) $f(x)= x^3+6x^2-4$
$f'(x)=3x^2+12x = x(3x+12)$
$\Leftrightarrow 0 = x(3x+12)$
$\Leftrightarrow x=0$ oder $x= -4$
(mögliche Extremstellen)
$f''(x)=6x+12$
$f''(0)=6\cdot 0+12=12>0 \Rightarrow$ TP bei $x=0$
$f''(-4)=6\cdot(-4)+12 =-12<0 \Rightarrow$ HP bei $x=-4$
$f(0)=-4$
$f(-4)=28$
$\Rightarrow T(0|-4); H(-4|28)$

b) $g(x)=x^4-4x^3+1$
$g'(x)=4x^3-12x^2 = 4x^2(x-3)$
$0=4x^2(x-3)$
$\Leftrightarrow x=0$ oder $x=3$
(mögliche Extremstellen)
$g''(x)=12x^2-24x$
$g''(0)=0 \Rightarrow$ kein Extrema bei $x=0$
$g''(3)=12\cdot 3^2-24\cdot 3=36>0 \Rightarrow$ TP bei $x=3$
$g(3)=3^4-4\cdot 3^3+1=-26$
$T(3|-26)$

c) $h(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3-3x^2$

$h`(x)=3x^3-3x^2-6x = 3x(x^2-x-2)$

$0= 3x(x^2-x-2)$

$\Leftrightarrow$ $x_1=0$ oder $x^2-x-2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_2=2$ oder $x_3=-1$ (mögliche Extremstellen)

$h``(x)=9x^2-6x-6$

$h``(0)=-6<0 \Rightarrow$ HP bei $x_1=0$

$h``(2)=18>0 \Rightarrow$ TP bei $x_2=2$

$h´´(-1)=9>0 \Rightarrow$ TP bei $x_3=-1$

$h(0)=0$; $h(2)=-8$; $h(-1)=-\frac{5}{4}$

$H(0|0)$; $T_1(2|-8)$; $T_2(-1|-\frac{5}{4})$

Lösungen zur Aufg. 3:

a) $f(x)=0{,}5x^4+x^3$

$f`(x)=2x^3+3x^2$; $f``(x)=6x^2+6x$; $f```(x)=12x+6$

$0=6x^2+6x = 6x(x+1)$

$\Leftrightarrow$ $x_{w1}=0$ oder $x_{w2}=-1$ (mögliche Wendestellen)

$f```(0)=12\cdot 0+6=6\neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_{w1}=0$

$f```(-1)=12(-1)+6=-6\neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_{w2}=-1$

$f(0)=0$

$f(-1)=0{,}5\cdot(-1)^4+(-1)^3= 0{,}5-1= -0{,}5$

$W_1(0|0)$ $W_2(-1|-0{,}5)$

b) $f(x)=x^4-4x^3+1$

$f`(x)=4x^3-12x^2$; $f``(x)=12x^2-24x$; $f```(x)=24x-24$

$0=12x^2-24x = 12x(x-2)$

$\Leftrightarrow$ $x_{w1}=0$ oder $x_{w2}=2$ (mögliche Wendestellen)

$f```(0)=24\cdot 0-24= -24\neq 0\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_{w1}=0$

$f```(2)=24\cdot 2-24=24\neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_{w2}=2$

$f(0)=1$

$f(2)=-15$

$W_1(0|1)$ und $W_2(2|-15)$

c) $f(x)=\frac{4}{5}x^5-\frac{1}{6}x^4+2x+1$

$f`(x)= 4x^4-\frac{2}{3}x^3+2$ $f``(x)=16x^3-2x^2$ $f```(x)=48x^2-4x$

$0=16x^3-2x^2 = 2x^2(8x-1)$

$\Leftrightarrow$ $x_{w1}=0$ oder $w_{w2}=\frac{1}{8}$ (mögliche Wendestellen)

$f```(0)=48\cdot 0^2-4\cdot 0=0 \Rightarrow$ kein Wendepunkt bei $x_{w1}=0$

$f```(\frac{1}{8})= 48\cdot(\frac{1}{8})^2-4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_{w2}=\frac{1}{8}$

$f(\frac{1}{8})=\frac{4}{5}(\frac{1}{8})^5-\frac{1}{6}(\frac{1}{8})^4+2(\frac{1}{8})+1 \approx 1{,}25$

$W(\frac{1}{8}|1{,}25)$

Lösung zur Aufg. 4:

Achsenschnittpunkte:

$f(x)=0 \Rightarrow 0=x^4-5x^2+4 \Rightarrow$ Substitution $x^2=z \Rightarrow f(z)=z^2-5z+4$

$0 = z^2-5z+4$

$\Rightarrow z=4$ oder $z=1$

$\Rightarrow x_1=\sqrt{4}=2 \quad x_2=-\sqrt{4}=-2 \quad x_3=\sqrt{1}=1 \quad x_4=-\sqrt{1}=-1$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(2|0)$; $N_2(-2|0)$; $N_3(1|0)$; $N_4(-1|0)$

$f(0)=4$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $Y(0|4)$

Bestimmung möglicher Extrema:

$f`(x)=4x^3-10x = x(4x^2-10)$

$0= 4x(x^2-\frac{5}{2})$

$\Leftrightarrow x_{E1}=0$ oder $x_{E2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$ oder $x_{E3}=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

(mögliche Extremstellen)

$f``(x)=12x^2-10$

$f``(0)=-10<0 \Rightarrow$ HP bei $x_{E1}=0$

$f``(\sqrt{\frac{5}{2}}) = 20>0 \Rightarrow$ TP bei $x_{E2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$f``(-\sqrt{\frac{5}{2}})=20>0 \Rightarrow$ TP bei $x_{E2}=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$f(0)=4$; $f(\sqrt{\frac{5}{2}})=-2{,}25$; $f(-\sqrt{\frac{5}{2}})=-2{,}25$

$H(0|4)$ $T_1(\sqrt{\frac{5}{2}}|-2{,}25)$ $T_2(-\sqrt{\frac{5}{2}}|-2{,}25)$

Bestimmung möglicher Wendepunkte:

$f``(x)=0 \Rightarrow 0=12x^2-10$

$\Leftrightarrow 0=x^2-\frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow x_{w1}=\sqrt{\frac{5}{6}}$ oder $x_{w2}=-\sqrt{\frac{5}{6}}$

(mögliche Wendestellen)

$f```(x)=24x$

$f```(\sqrt{\frac{5}{6}})=24\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}\neq 0$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_{w1}=\sqrt{\frac{5}{6}}$

$f```(-\sqrt{\frac{5}{6}})=24\cdot(-\sqrt{\frac{5}{6}})\neq 0$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_{w2}=-\sqrt{\frac{5}{6}}$

$f(\sqrt{\frac{5}{6}})=\frac{19}{36}$

$f(-\sqrt{\frac{5}{6}})=\frac{19}{36}$

$W_1(\sqrt{\frac{5}{6}}|\frac{19}{36})$ $W_2(-\sqrt{\frac{5}{6}}|\frac{19}{36})$

Die Funktion f besitzt die Achsenschnittpunkte $N_1(2|0)$, $N_2(-2|0)$, $N_3(1|0)$, $N_4(-1|0)$ und $Y(0|4)$, die Extrema $H(0|4)$; $T_1(\sqrt{\frac{5}{2}}|-2{,}25)$; $T_2(-\sqrt{\frac{5}{2}}|-2{,}25)$ und die Wendepunkte $W_1(\sqrt{\frac{5}{6}}|\frac{19}{36})$ und $W_2(-\sqrt{\frac{5}{6}}|\frac{19}{36})$.

Lösungen zur Aufg. 5:

a) Für die quadratische Funktion f mit $f(x)=x^2$ gilt, dass der zugehörige Graph eine Normalparabel ist. Da bei (nach oben geöffneten) Parabeln der Scheitelpunkt mit dem Tiefpunkt identisch ist, brauchen wir den Graphen von f nur um 3 Einheiten entlang der y-Achse nach oben zu verschieben: g mit $g(x)=x^2+3$ ist eine gesuchte Funktion.

b) Bei der Funktion f mit $f(x)= -(x-5)^2$ handelt es sich um die nach unten geöffnete und um 5 Einheiten entlang der x-Achse nach rechts verschobene Normalparabel. Diese hat dann bei (5|0) ihren Scheitelpunkt und damit ihren Hochpunkt.

c) Da die Ausgangsgleichung eine Potenzfunktion 3. Grades sein soll, muss die erste Ableitung eine quadratische Funktion sein. Wir überprüfen eine einfache Funktion: $f`(x)=x^2-1$. $f`(1)=0$ und $f``(x)=2x$, also $f``(1)=2\neq 0$. Nun haben wir die erste Ableitungsfunktion so aufgestellt, dass $x_E=1$ eine Nullstelle dieser Funktion ist. Wie lautet nun die Ausgangsfunktion? Vorgehen: Wir müssen „rückwärts" differenzieren und finden mit ein wenig nachdenken oder ausprobieren die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$. Für diese Funktion gilt: f hat bei x=1 eine Extremstelle!