Lösungen zur Differentialrechnung

Lösungen zur Aufg. 1: Achtung: Vereinfachte Schreibweise (f(x+h)-f(x))/h für $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

a) $f(x) = x^2 - 3x$
$(f(x + h) - f(x)) / h$
$= ((x + h)^2 - 3(x + h) - (x^2 - 3x)) / h$
$= (x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x) / h$
$= (2xh - 3h + h^2) / h$
$= 2x - 3 + h \xrightarrow[h\to 0]{} 2x–3+0 = 2x–3$
Die gesuchte Ableitungsfunktion besitzt die Funktionsgleichung f \`(x)= 2x–3

b) $g(x) = 5x^2$
$(f(x + h) - f(x)) / h$
$= (5(x + h)^2 - 5x^2) / h$
$= (5x^2 + 10xh + 5h^2 - 5x^2) / h$
$= (10xh + 5h^2) / h$
$= 10x + 5h \xrightarrow[h\to 0]{} 10x+5\cdot 0 = 10x$
Die gesuchte Ableitungsfunktion besitzt die Funktionsgleichung g \`(x)= 10x

c) $h(x)=x^3$
$(f(x + h) - f(x)) / h$
$= ((x + h)^3 - x^3) / h$
$= (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3) / h$
$= (3x^2h + 3xh^2 + h^3) / h$
$= 3x^2 + 3xh + h^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 3x^2+3x\cdot 0+0= 3x^2$
Die gesuchte Ableitungsfunktion besitzt die Funktionsgleichung h \`(x)= $3x^2$

d) $k(x)= x^4$
$(f(x + h) - f(x)) / h$
$= ((x + h)^4 - x^4) / h$
$= (x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4) / h$
$= (4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4) / h$
$= 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 \xrightarrow[h\to 0]{} 4x^3$
Die gesuchte Ableitungsfunktion besitzt die Funktionsgleichung k \`(x)= $4x^3$

Lösungen zur Aufg. 2:

a) f \`(x) = 2x
b) f \`(x) = $3x^2$
c) f \`(x) = $4x^3$
d) f \`(x) = 6x
e) f \`(x) = $12x^2$
f) f \`(x) = $100x^3$
g) f \`(x) = 2x - 5
h) f \`(x) = 2x + 7
i) f \`(x) = 10x + 2
j) f \`(x) = $30x^2 - 14x + 4$

Lösungen zur Aufg. 3:

a) Ausgangsfunktionen f_i und Ableitungsfunktionen f_i\`:

$f_1(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
f_1\`(x) $= \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}$

$f_2(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
f_2\`(x) $= \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}}$

$f_3(x) = \sqrt[4]{x^8} = x^{\frac{8}{4}} = x^2$
f_3\`(x) = 2x

$f_4(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$
f_4\`(x) $= \frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}}$

$f_5(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$
f_5\`(x) $= -\frac{1}{2}\, x^{-\frac{3}{2}}$

$f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$
f_6\`(x) $= -\frac{1}{2}\, x^{-\frac{3}{2}}$

$f_7(x) = \frac{3x}{6\sqrt{x^4}} = \frac{x}{2x^{\frac{4}{2}}} = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2}\, x^{-1}$
f_7\`(x) $= -\frac{1}{2}\, x^{-2}$

$f_8(x) = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\; x^{\frac{1}{2}}$
f_8\`(x) $= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}}\; x^{-\frac{1}{2}}$

$f_9(x) = x^5 - 4x^2 + 3x$
f_9\`(x) $= 5x^4 - 8x + 3$

$f_{10}(a) = 3ax + 4a^2$

$\mathbf{f_{10}`(a)} = 3x + 8a$

(nach a differenzieren!!)

$f_{11}(x) = \sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,x^{-3} + \sqrt{2}$

$\mathbf{f_{11}`(x)} = \sqrt{2} - 3\cdot\sqrt{3}\cdot x^{-4}$

$f_{12}(x) = 3\,x^{-2} - x^{-\frac{1}{2}} + 4\,x^{0,3}$

$\mathbf{f_{12}`(x)} = -6x^{-3} + \frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}} + 1{,}2\cdot x^{-0,7}$

$f_{13}(x) = \frac{1}{3x} + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

$= \frac{1}{3}x^{-1} + x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}$

$\mathbf{f_{13}`(x)} = -\frac{1}{3}x^{-2} + \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}$

$f_{14}(a) = \frac{1}{x} - a^2 + x^2$

$= x^{-1} - a^2 + x^2$

$\mathbf{f_{14}`(a)} = -2a$

(nach a differenzieren!!)

$f_{15}(x) = \sqrt[3]{x^4} + 7 = x^{\frac{4}{3}} + 7$

$\mathbf{f_{15}`(x)} = \frac{4}{3}\,x^{\frac{1}{3}}$

$f_{16}(x) = \sqrt[3]{x^{0,9}} - \frac{1}{x} = x^{0,3} - x^{-1}$

$\mathbf{f_{16}`(x)} = 0{,}3\,x^{-0,7} + x^{-2}$

$f_{17}(x) = \frac{3x+6x^2}{6x} = \frac{3x(1+2x)}{6x}$

$= \frac{1}{2}(1+2x) = \frac{1}{2} + x$

$\mathbf{f_{17}`(x)} = 1$

$f_{18}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

(oder $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^1} = x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}}$)

$\mathbf{f_{18}`(x)} = -\frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}}$

b) Funktionsterme von $f_i`$ ohne Brüche/negative Zahlen im Exponenten:

$\mathbf{f_1`(x)} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\mathbf{f_2`(x)} = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\mathbf{f_3`(x)} = 2x$

$\mathbf{f_4`(x)} = \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$\mathbf{f_5`(x)} = -\frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

$\mathbf{f_6`(x)} = -\frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

$\mathbf{f_7`(x)} = -\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}$

$\mathbf{f_8`(x)} = \sqrt{\frac{1}{6}}\,x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\mathbf{f_9`(x)} = 5x^4 - 8x + 3$

$\mathbf{f_{10}`(a)} = 3x + 8a$

$\mathbf{f_{11}`(x)} = \sqrt{2} - 3\cdot\sqrt{3}\cdot x^{-4}$

$= \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{3}}{x^4}$

$\mathbf{f_{12}`(x)} = -6x^{-3} + \frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}} + 1{,}2\cdot x^{-0,7}$

$= \frac{-6}{x^3} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1{,}2}{\sqrt[10]{x^7}}$

$\mathbf{f_{13}`(x)} = -\frac{1}{3}x^{-2} + \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}$

$= -\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\mathbf{f_{14}`(a)} = -2a$

$\mathbf{f_{15}`(x)} = \frac{4}{3}\,x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

$\mathbf{f_{16}`(x)} = 0{,}3\,x^{-0,7} + x^{-2}$

$= \frac{0{,}3}{\sqrt[10]{x^7}} + \frac{1}{x^2}$

$\mathbf{f_{17}`(x)} = 1$

$\mathbf{f_{18}`(x)} = -\frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

Lösungen zur Aufg. 4:

a) $f\,`(x) = 2x + 7$

b) $g`(x) = 2x + 8$

c) $h`(x) = 3x^2 + 14x + 1$

d) $i`(x) = 3x^2 + 16x + 7$

Lösungen zur Aufg. 5:

Lösungsweg:
Mit Hilfe der Potenzregel die Ableitungsfunktion aufstellen. Die x-Koordinate des Punktes als x-Wert in die Ableitungsfunktion einsetzten, der Funktionswert gibt die Steigung an. Die Koordinaten des Punktes in die Tangentengleichung y=mx+b einsetzen (m ist Steigungsfaktor!), nach b auflösen und Gleichung aufstellen.

	Ableitungsfunktion	Steigung in P	Tangentengleichung
a)	$f'(x) = 2x$	$f'(2) = 4$	$y = 4x + 1$
b)	$f'(x) = 2x + 6$	$f'(1) = 8$	$y = 8x - 4$
c)	$f'(x) = 2x - 1$	$f'(3) = 5$	$y = 5x - 8$
d)	$f'(x) = -2x$	$f'(5) = -10$	$y = -10x + 79$
e)	$f'(x) = 6x + 5$	$f'(-1) = -1$	$y = -x - 5$
f)	$f'(x) = -24(3x + 1)^3$	$f'(0) = -24$	$y = -24x - 2$

Lösungen zur Aufg. 6:

a) $f`(x) = \frac{9}{(x+2)^2}$ **b)** $g`(x) = \frac{5}{(2x-1)^2}$ **c)** $h`(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

Lösungen zur Aufg. 7:

a) $f'(x) = \cos(x)$

b) $g'(x) = -3\sin(x)$

c) $h'(x) = 6 + 5\sin(x)$

d) $f'(x) = -\sin(x)$

e) $g'(x) = -\sin(x)^2+\cos(x)^2$
(Produktregel)

f) $h'(x) = \sin(x)$

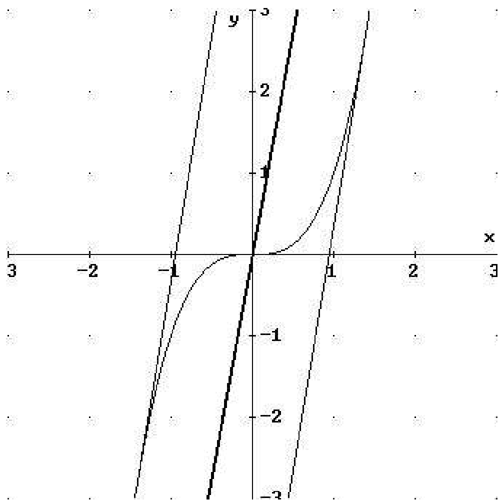
g) $f'(x) = -\cos(x)$

h) $g'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$ (Quotientenregel)

i) $h'(x) = 0$ (Erinnerung: $\sin(x)^2+\cos(x)^2=1$!)

Lösung zur Aufg. 8:

Zeichnen Sie zuerst den Graphen, dann eine lineare Funktion mit der Steigung m=6 [z.B. y=6x+0 mit den Punkten (0|0) und (1|6)] und verschieben Sie diese parallel, bis Sie Tangenten finden, die den Graphen nur berühren und nicht schneiden.



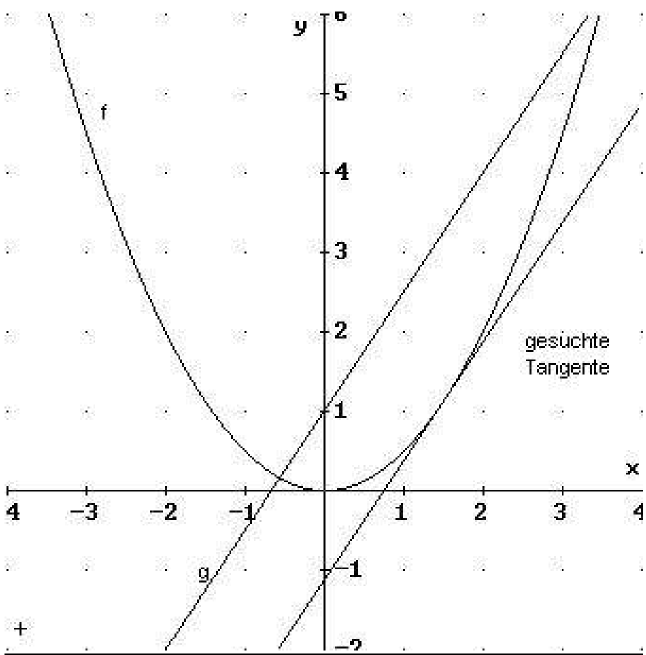
$f(x)=x^3 \Rightarrow f`(x)=3x^2$.
Es soll gelten: $f`(x_i)=6$
$\Rightarrow\ 6=3\cdot x_i^2 \ \Rightarrow\ x_i^2=2 \ \Rightarrow x_{i1}=\sqrt{2}$ und $x_{i2}=-\sqrt{2}$.
$f(x_{i1})=(\sqrt{2})^3= 2\cdot\sqrt{2}$, $f(x_{i2})=(-\sqrt{2})^3=-2\cdot\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ Berührpunkte $P_1(\sqrt{2}\,|2\sqrt{2})$; $P_2(-\sqrt{2}\,|-2\sqrt{2})$
Tangente an P_1: allg: y=mx+n, $m,n\in$ IR $2\sqrt{2}=6\cdot\sqrt{2}+n \Rightarrow n=-4\sqrt{2}$
Tangente an P_2: $-2\sqrt{2}=6\cdot(-\sqrt{2})+n \Rightarrow n=4\sqrt{2}$
Die gesuchten Tangentengleichungen lauten $y=6\cdot x-4\sqrt{2}$ und $y=6\cdot x+4\sqrt{2}$.

Lösung zur Aufg. 9:

An den gesuchten Stellen x_i muss gelten: $f`(x_i) = g`(x_i)$.
$f`(x) = x-3x^2$ und $g`(x)=3x^2$ $\Rightarrow$ $x_i-3x_i^2 = 3x_i^2$ an den gesuchten Stellen x_i.
Äquivalenzumformung der Gleichung ergibt $x_i=6x_i^2$ Auflösung (umständlich) mit der „pq-Formel“ oder einfacher: $0=6x_i^2-x_i \Rightarrow 0= x_i(6x_i-1)$ Dieses Produkt auf der rechten Seite der Gleichung wird zu Null, wenn $x_1=0$ oder wenn $x_2=\frac{1}{6}$!
Die Funktionen f und g besitzen an den Stellen $x_1=0$ und $x_2=\frac{1}{6}$ den gleichen Anstieg.

Lösung zur Aufg. 10:

Da der Graph von g parallel zur gesuchten Tangente t verläuft und zudem eine Gerade mit der Steigung $m=\frac{3}{2}$ ist , muss auch für die Steigung von t gelten: $m=\frac{3}{2}$.



Gesucht: Berührpunkt B.
x-Koordinate von B: Es muss gelten:
$f`(x_i)= \frac{3}{2}$, da $f`(x)=x$, ist $x_i=\frac{3}{2}$.
y-Koordinate von B:
$f(x_i)=f(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{8}$. Also $B(\frac{3}{2}|\frac{9}{8})$.

Gesucht: Tangentengleichung zu t:
$y=mx+n$, $m,n\in IR$. m ist bekannt mit $m=\frac{3}{2}$.
Koordinaten von B in Gleichung einsetzen:
$\frac{9}{8}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}+n \Rightarrow n=\frac{9}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{9}{8}$. Die gesuchte Tangentengleichung lautet $y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}$.

Lösung zur Aufg. 11:

1. Lösungsweg:
Falls g eine Tangente an f an der Stelle x_i ist, muss gelten: $f`(x_i)=-4$, da $m=-4$ für g.
$f`(x)= \frac{2}{3}x-2 \Rightarrow -4 = \frac{2}{3}x_i-2 \Leftrightarrow x_i= -3$, $f(-3)=9$. Berührpunkt: $B(-3|9)$.
Überprüfung der Tangentengleichung:
$y=-4x+n \Rightarrow 9=-4(-3)+n \Rightarrow n=-3 \Rightarrow y=-4x-3 \Rightarrow$ Dies ist die angegebene Gleichung der Funktion g, also ist g eine Tangente an f [im Punkt $B(-3|9)$].
2. Lösungsweg:
Falls g eine Tangente an f an der Stelle x_i ist, muss gelten: g und f schneiden sich in genau einem Punkt mit der x-Koordinate x_i.
$f(x_i)=g(x_i) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_i^2-2x_i = -4x_i-3 \Leftrightarrow 0=\frac{1}{3}x_i^2+2x_i+3 \Rightarrow 0=x_i^2+6x_i+9 = (x_i+3)^2 \Rightarrow x_i=-3$
(Auch umständlich mit der “pq-Formel” lösbar)
Da es nur einen Schnittpunkt gibt, ist es ein Berührpunkt und somit ist g Tangente an f.
Bestimmung des Berührpunktes: $f(-3)=9 \Rightarrow B(-3|9)$.