Aufgaben: Unbestimmte und bestimmte Integrale

Aufgabe 1: Stammfunktionen

Aufg. 1.1:

Ermitteln Sie die Menge aller Stammfunktionen (Repräsentantenschreibweise) für die Funktionen f_i mit nachfolgenden Gleichungen:

a) $f_1(x)=0{,}5-3x+4x^3$ b) $f_2(x)=4x(x^2-5)$ c) $f_3(s)=ax+as-3$ d) $f_4(x)=x^3-3x^2-x$

e) $f_5(h)=\frac{3}{c\cdot h^2}$ f) $f_6(r)=(r-1)\cdot(r+1)$ g) $f_7(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}+t$ h) $f_8(a)=a^{-1+2n}$

Aufg. 1.2:

Stellen Sie die Fkt. $F_1(x)=-x^2$; $F_2(x)=-x^2+1$; $F_3(x)=-x^2-1$; $F_4(x)=-x^2+3$ graphisch dar. Zeigen Sie, dass die Tangenten in Punkten mit demselben Abszissenwert x bei allen vier Graphen parallel zueinander verlaufen und den Anstieg $-2x$ besitzen.

Aufg. 1.3:

Die Funktion h mit $h(x)=x^3-2x^2+1$ hat eine Stammfunktion, deren Graph durch den Punkt P(1|2) verläuft. Bestimmen Sie diese Stammfunktion.

Aufg. 1.4:

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von f_i, die die angegebene Bedingung erfüllt.

a) $f_1(x)=(x^2-1)(x^2+1)$, $F_1(1)=0{,}6$

b) $f_2(t)=0{,}5\cdot\pi\cdot t-2\pi$, $F_2(1)=\pi$

c) $f_3(b)=\frac{1}{b^2}$, $F_3(7)=\frac{6}{7}$

Aufg. 1.5:

Von einer Funktion f ist bekannt: $f''(x)=4x^2-3x+1$ (2. Ableitungsfunktion). Geben Sie f in Repräsentantenschreibweise an.

Aufgabe 2: Das unbestimmte Integral

Aufg. 2.1 Bestimmen Sie

a) $\int f(x)dx$ mit $f(x)=x^3-4x^2+2$

b) $\int f(x)dx$ mit $f(x)=(0{,}5\cdot x^2-2x)^2$

c) $\int h(x)dx$ mit $h(x)=a\cdot x^2-\frac{x}{3}+1$ ($a\in \mathbb{R}$, $a\neq 0$)

d) $\int 2x(x-2)(x+2)dx$

e) $\int (\frac{x^4}{2}+\frac{2}{3}x^2-4)dx$

f) $\int (\frac{x^2-1}{1+x})dx$

g) $\int \sqrt{\frac{9}{x^4}}\,dx$

Aufg. 2.2: Bestimmen Sie

a) $\int (\frac{x^2+2x}{x})dx$

b) $\int 2dx$

c) $\int b\ dx$

d) $\int b\ db$

e) $\int (\sin(x)+\cos(x))dx$

f) $\int 3\cdot\sqrt{x}dx$

g) $\int \frac{dx}{2}$

Aufgabe 3: Das bestimmte Integral

Aufg. 3.1: Bestimmen Sie

a) das Integral der Funktion f mit $f(x)=x^2+2x$ im Intervall [-1;2].

b) das Integral über der Funktion f mit $f(x)=x^3+1$ in den Grenzen von 0 und 1 an.

c) $\int_0^2 f(x)dx$ mit $f(x)=x^2+x$

d) den Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion h mit $h(x)=0{,}5x^2$ zwischen den x-Stellen 0 und 1.

Aufg. 3.2:
Wie verändert sich der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f_1-f_4 im Intervall [0;a] mit a>0, wenn die Intervalllänge auf [0;2a] verdoppelt wird?

a) $f_1(x)=x$ b) $f_2(x)=x^2$ c) $f_3(x)=2x$ d) $f_4(x)=x^3$

Aufg. 3.3:
Die Funktion g mit $g(x)= -x^2+6x-8$ ist gegeben. Geben Sie den Flächeninhalt an, der zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse liegt (oberhalb der x-Achse!).

Aufgabe 4: Flächenberechnungen

Aufg. 4.1:
Berechne den Flächeninhalt zwischen x-Achse und Graph der Funktion f mit $f(x)=x+6$ in den Intervallen [0;4]; [3;5]; [–1;0]; [–4;–2].

Aufg. 4.2:
Berechnen Sie mit Hilfe eines bestimmten Integrals den Flächeninhalt des Dreieckes ABC mit A(–3|0) B(4,5|0) C(1,5|6)

Aufg. 4.3:
Gegeben: Funktion h mit $h(x)=0{,}2\cdot x+a$; a>0. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Flächenmaßzahlfunktion $A_{[a;5a]}$.

Aufg. 4.4:
Gegeben: Funktion f mit $f(x)= \frac{1}{a}\cdot x$; $a>0$

Behauptung: Ist a ein Vielfaches von $\frac{1}{12}$ (z. B. $1\cdot\frac{1}{12}$; $2\cdot\frac{1}{12}$; $3\cdot\frac{1}{12}$,..,) dann ist $A_{[a;5a]}$ ganzzahlig.

Überprüfen Sie die Behauptung.

Aufg. 4.5:
Von einer linearen Funktion f ist bekannt: $A_{[0;2]}=4{,}5$ und $F(4)=8$. Bestimmen Sie f.