Lösungen zu: Binomialverteilungen

Lösung Aufgabe 1:

a)

$P(X=3) \approx 0{,}1641 = \underline{16{,}41\%}$

$P(X \leq 2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) \approx \underline{0{,}1673 = 16{,}73\%}$

$P(X=0) \approx 0{,}8179 = \underline{81{,}79\%}$

$P(X \leq 9) = P(X=9)+P(X=10) \approx \underline{0{,}3758 = 37{,}58\%}$

$P(X=12) \approx 0{,}1285 = \underline{12{,}85\%}$

$P(X \geq 2) = 1-[P(X=0)+P(X=1)] \approx \underline{0{,}7663 = 76{,}63\%}$

b) Binomialverteilung mit den Parametern n=20 und $p=\frac{30}{100}=0{,}3$ liegt vor, also $B_{20;0,3}(X=k)$

$P(X=5) \approx 0{,}1789 = 17{,}89\%$, $P(X=6) \approx 0{,}1916 = 19{,}16\%$, $P(X=7) \approx 0{,}1643 = 16{,}43\%$

Lösung Aufgabe 2:

a) Berechnung ohne Binomialverteilung!

$p=\frac{1}{37}$ (Null mitzählen!), $P(X>33)=P(X=34)+P(X=35)+P(X=36)= \frac{1}{37}+\frac{1}{37}+\frac{1}{37}=\frac{3}{37} \approx 0{,}0811 = \underline{8{,}11\%}$

Mit einer Wahrscheinlich. von ca. <u>8,1%</u> wird bei einem Kugellauf eine Zahl größer 33 fallen.

b) Wir fassen die Ergebnisse dieses Zufallsexperimentes als Binomialverteilung mit den Parametern n=5 und $p=\frac{18}{37}$ auf.

$$P(X=3)=\binom{5}{3} \cdot \left(\tfrac{18}{37}\right)^3 \cdot \left(1-\tfrac{18}{37}\right)^2 \approx 10 \cdot 0{,}1151 \cdot 0{,}2637 \approx 0{,}3035 = 30{,}35\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 30,35% wird bei 5 Kugelläufen genau dreimal eine ungerade Zahl fallen

c) $P(X \leq 3) = 1-P(X>3) = 1-[P(X=4)+P(X=5)] \approx 1-[0{,}1438+0{,}0272] = 0{,}829 = 82{,}9\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 5 Kugelrunden höchstens dreimal eine ungerade Zahl auftritt, beträgt ca. 82,9%.

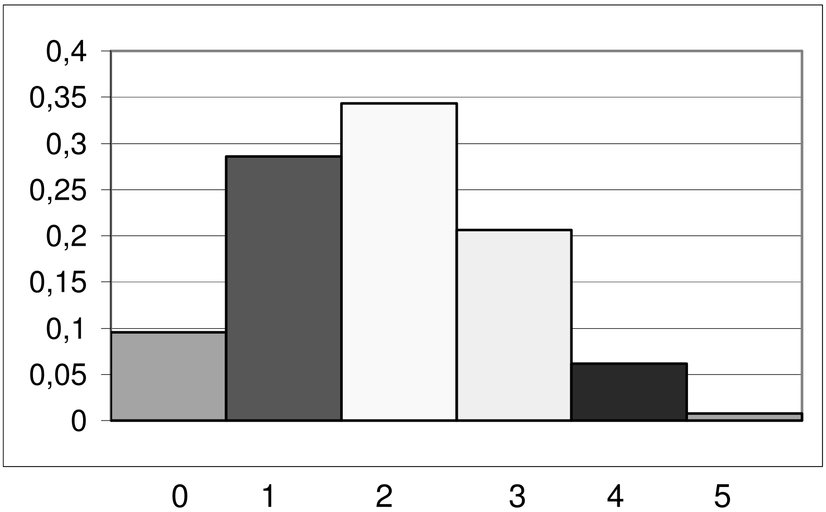
Lösung Aufg. 3:

a) Die Parameter für diese Binomialverteilung lauten n=5 und $p=\frac{3}{8}=0{,}375$, also

$B_{5;0,375}(X=k)$

k	P(X=k)
0	0,095
1	0,286
2	0,343
3	0,206
4	0,062
5	0,007

Histogramm zu $B_{5;0,375}(X=k)$



b) $P(A) = P(X \leq 2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) \approx 0{,}095+0{,}286+0{,}343 = 0{,}724 = 72{,}4\%$

$P(B) = P(X \geq 1) = 1-P(X=0) \approx 1-0{,}095 = 0{,}905 = 90{,}5\%$

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten betragen ca. P(A) =<u>72,4%</u> und P(B)=<u>90,5%</u>.

c) Max trifft die ersten viermal nicht (Misserfolg), dann trifft er (Erfolg), also ist die Reihenfolge MMMME, wobei die Misserfolgswahrscheinlichkeit $q=1-p=0{,}625$ beträgt.

also: $P(C) = (0{,}625)^4 \cdot 0{,}375 \approx 0{,}057 = 5{,}7\%$

(anderer Lösungsweg: Die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer ist P(X=1)≈0,286, aber nur ein Fünftel dieser Möglichkeiten kommen in Frage, also 0,286:5=0,0572)
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 5,7%.

d) „Mindestens einen Fehlschuss pro Serie" ist gleichbedeutend mit „höchstens 9 Treffer pro Serie".
Wir betrachten $B_{10;0,9}(X=k)$. $P(x\leq 9) = 1-P(X=10) = 1-\left[\binom{10}{10}\cdot 0{,}9^{10}\cdot 0{,}1^{10-10}\right] = 1-1\cdot 0{,}9^{10}\cdot 1 \approx 0{,}651$

Die Wahrscheinlichkeit, in einer Serie mindestens einen Fehlschuss zu haben, beträgt rd. 0,651, also ist die Wahrscheinlichkeit, in allen 5 Serien mindestens einen Fehlschuss zu haben : $P= 0{,}651^5 \approx 0{,}117 = 11{,}7\%$

Da die Wahrscheinlichkeit auf einen Treffen unabhängig von der Serie für jeden Schuss gleich ist ($p=\frac{9}{10}$), können wir folgende Binomialverteilung betrachten: $B_{50;0,9}(X=k)$

$P(X\leq 48) = 1 - P(X>50)$ $1-[P(X=49)+P(X=50)] \approx 1-[0{,}0286+0{,}0052]=1-0{,}0338=0{,}9662=96{,}6\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass jede Serie mindestens einen Fehlschuss enthält, beträgt ca. 11,7% und die Wahrscheinlichkeit, dass Anna insgesamt höchstens 48 mal trifft, beträgt ca. 96,6%.

Lösung Aufgabe 4:

a) Wir betrachten die Binomialverteilung $B_{20;0,065}(X=k)$, also mit den Parametern n=20 und p=6,5%=0,065.
$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\approx 0{,}2608+0{,}3625+0{,}2394=0{,}8627=86{,}27\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von gerundet 86,27% sind in einem Karton höchstens 2 defekte Bauteile.

b) Nun betrachten wir die Parameter n=12 und p=0,8627 (aus Aufgabenteil a), somit $B_{12;0,8627}(X=k)$.
$P(X=12)\approx 0{,}1699= 16{,}99\%$
einfacher: $p^{12}=(0{,}8627)^{12}=0{,}1699$
Mit einer gerundeten Wahrscheinlichkeit von 16,99% sind in allen 12 Kartons der Sendung höchstens zwei defekte Bauteile.

c) Wir betrachten wieder wie in Aufgabenteil b) die Binomialverteilung $B_{12;0,8627}(X=k)$.
$P(X\leq 10)=1-P(X>10)=1-[P(X=11)+P(X=12)\approx 1-[0{,}3246+0{,}1699]=1-0{,}4945=0{,}5055=50{,}55\%$.
Mit einer gerundeten Wahrscheinlichkeit von 50,55% enthalten höchstens 10 von 12 Kartons nicht mehr als 2 defekte Bauteile.

Lösung Aufgabe 5:

a) $P(X=6)\approx 0{,}0829$

b) $\binom{30}{6}$ ⇒ Anzahl der Möglichkeiten, aus 30 Kugeln 6 Kugeln auszuwählen.

$0{,}3$ ⇒ Wahrscheinlichkeit, bei einer Ziehung eine blaue Kugel zu erhalten
(Erfolgswahrscheinlichkeit: $p=\frac{9}{30}=0{,}3$. Für rote Kugeln gilt: $\frac{21}{30}=0{,}7$, also muss sich die Fragestellung des Ereignisses, das zum Term $\binom{30}{6}\cdot 0{,}3^6\cdot 0{,}7^{24}$ geführt hat, auf blaue Kugeln beziehen).

$0{,}3^6$ ⇒ Wahrscheinlichkeit, bei 6 Ziehungen mit Zurücklegen jeweils eine blaue Kugel zu erhalten.

$0{,}7$ ⇒ Wahrscheinlichkeit, bei einer Ziehung eine rote Kugel zu erhalten (Misserfolgsw.).

$0{,}7^{24}$ ⇒ Wahrscheinlichkeit, bei 24 Ziehungen jeweils eine rote Kugel zu erhalten.

$\binom{30}{6}\cdot 0{,}3^6\cdot 0{,}7^{24}$ ⇒ Wahrscheinlichkeit, bei 30 Ziehungen mit Zurücklegen genau 6 blaue Kugeln zu erhalten.

c) Die Binominalverteilung basiert auf einem n-stufigen Bernoulli-Versuch. Bei einem n-stufigen Bernoulli-Versuch ändert sich bei jeder Stufe die Erfolgs- bzw. Misserfolgswahrscheinlichkeit nicht. Bei dem Urnenmodell ohne Zurücklegen jedoch ändert sich von Ziehung (Stufe) zu Ziehung die Erfolgswahrscheinlichkeit.
Bsp: rote Kugeln, anfangs Erfolgswahrscheinlichkeit $p=\frac{21}{30}=0{,}7$. Wird eine rote Kugel gezogen und nicht zurückgelegt, so ist die Erfolgswahrscheinlichkeit beim zweiten Ziehen (in der 2. Stufe)

$p`=\frac{20}{29}\approx 0{,}69$. Wird eine blaue Kugel gezogen, so ändert sich für rot die Erfolgswahrscheinlichkeit wie folgt: $p`=\frac{21}{29}\approx 0{,}72$.

Lösung Aufgabe 6:

Es liegt eine Binomialverteilung vor mit $p=\frac{52}{650}=0{,}08$, allerdings ist k nicht bekannt, muss erst noch bestimmt werden. k gibt die Anzahl der Schüler an, die in einer Klasse sein müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% mindestens einer von ihnen eine Erkältung hat.
Das heißt: $P(X\geq 1)=60\%$ „*Mindestens einer*„ ist gleichbedeutend mit „*nicht keiner*“, also
$P(X\geq 1)=1-P(X=0)$
Jetzt lässt sich k berechnen:

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\left[\binom{k}{0}\cdot 0{,}08^0\cdot 0{,}92^{k-0}\right]=1-\left[\frac{k!}{0!\cdot(k-0)!}\cdot 0{,}08^0\cdot 0{,}92^k\right]=1-[1\cdot 1\cdot 0{,}92^k]=1-0{,}92^k$$

also $60\%=0{,}6=1-0{,}92^k$

$\Rightarrow\ 0{,}92^k=1-0{,}6$

$\Rightarrow\ 0{,}92^k=0{,}4$

$\Rightarrow\ \ln(0{,}92^k)=\ln(0{,}4)$ (Erinnerung an das Thema Logarithmusfunktion!!)

$\Rightarrow\ k\cdot\ln(0{,}92)=\ln(0{,}4)$

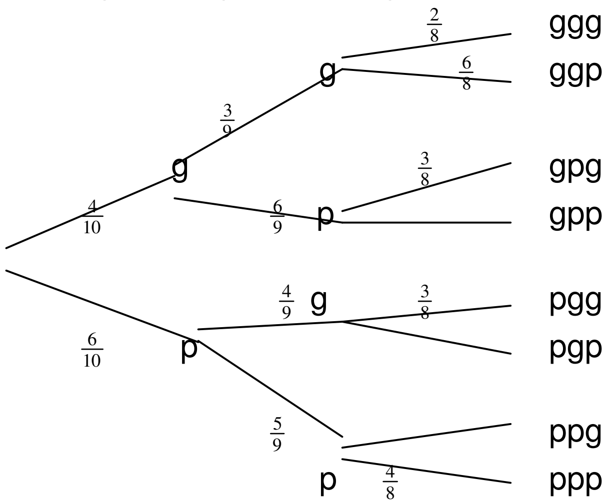
$\Rightarrow\ k=\frac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}92)}\approx 10{,}989\approx 11$ ·

[ggf Probe zur eigenen Sicherheit. $B_{11;0,08}(X=k)$ ist die Binomialverteilung, $P(X=0)\approx 0{,}3963$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, bei 11 Schülern keinen Schüler mit einer Erkältung zu haben, gerundet 40%$\Rightarrow$ also 60% dafür, mindestens einen Schüler mit einer Erkältung in der Klasse zu haben.

Antwort: Es müssen (gerundet) mindestens 11 Schüler in einer Klasse sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% mindestens ein Schüler erkältet ist.

Lösung Aufgabe 7:

a) Lösung der Aufgabenstellung vorteilhafter Weise mit einem Baumdiagramm.



$P(A)=P(ggg)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{30}=0{,}0\overline{3}\approx$ <u>3,3%</u>

$P(B)=P(ppp)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{6}=0{,}1\overline{6}\approx$<u>16,7%</u>

$P(C)=P(ggp)+P(gpg)+P(pgg)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{10}+\frac{2}{15}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}=0{,}3=$<u>30%</u>

b) Ereignis D: Es liegt eine Binomialverteilung $B_{10;0,4}(X=k)$ vor.
$P(X=5)\approx 0{,}2007=$<u>20,07%</u>
Ereignis E: Es liegt eine Binomialverteilung $B_{10;0,6}(X=k)$ vor.
$P(X\geq 7)=P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)\approx 0{,}3823=$<u>38,23%</u>
andere Möglichkeit: $B_{10;0,4}(X=k)$ mit „höchstens 2 grüne Kugeln“, dann gilt
$P(x\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\approx 38{,}23\%$

c) Wir betrachten die Binomialverteilung $B_{4;0,3823}(X=k)$.
$P(X=2)\approx 0{,}3346=$<u>33,46%</u>