Lösungen zu Hypothesentests

Lösungen zur Aufg. 1:

a) H_0: keine mündliche Überprüfung (wird angenommen)
H_0 ist aber falsch (da tatsächlich eine Überprüfung statt fand) $\Rightarrow$ Fehler 2. Art
Die Schüler gehen unvorbereitet in die mündliche Überprüfung.

b) H_0: keine mündliche Überprüfung (wird angenommen)
H_1: mündliche Überprüfung wird angenommen $\Rightarrow$ H_1 falsch bzw. H_0 wahr $\Rightarrow$ Fehler 1. Art
Die Schüler haben sich vorbereitet, obwohl keine Überprüfung statt fand.

c) H_0: Pilze sind giftig (vermutet)
H_0 trifft tatsächlich zu $\Rightarrow$ Es liegt kein Fehler vor. Der Pilzsammler isst die giftigen Pilze nicht.

d) H_0 ist in Wirklichkeit falsch, Fehler 2. Art $\Rightarrow$ Der Pilzsammler isst die ungiftigen Pilze nicht, obwohl er sie hätte essen können, er hat sie umsonst gesammelt.

Lösungen zur Aufg. 2:

a) A={7;8;9;10;11} $\overline{A}$ ={0;1;2;3;4;5;6} $\cup$ {12,13,......,49,50}

b) Aufgrund des durchgeführten Tests wird der Würfel (fälschlicher Weise) als unfair eingestuft, obwohl die Nullhypothese in der Realität zutrifft. Also: H_0 wird verworfen, obwohl H_0 in der Realität wahr ist, somit: Fehler 1. Art.

Lösungen zur Aufg. 3:

a) $\overline{A}$ ={50;.....,100} verwendete Binomialverteilung $B_{100;0,4}(X=k)$
$P(X\geq 50)=1-P(X\leq 49) \approx 1-0{,}9729 = 0{,}0271 = 2{,}72\%$

b) $\overline{A}$ ={0;....74} verwendete Binomialverteilung: $B_{100;0,8}(X=k)$
$P(X\leq 74) \approx 0{,}08748 \approx 8{,}75\ \%$

c) Sei A={0,........;k} der Annahmebereich und $\overline{A}$ ={(k+1);....100} der Ablehnungsbereich. Dann gilt laut Tabelle zu $B_{100;0,1}(X=k)$ für α und 1–α=0,98 :
$P(X\leq 17)\approx 0{,}99 \Rightarrow P(X>18)\approx 0{,}01$
$P(X\leq 16)\approx 0{,}9794 \Rightarrow P(X>17)\approx 0{,}0206$ $\Rightarrow$ $\overline{A}$ ={17;....100}
$P(X\leq 15)\approx 0{,}9601 \Rightarrow P(X>16)\approx 0{,}0399$
Der gesuchte Ablehnungsbereich ist $\overline{A}$ ={17;....100}.

Lösungen zur Aufg. 4:

H_0: „Gefäß mit 25% blauen Kugeln“ $\Rightarrow p_0=0{,}25$
H_1: „Gefäß mit 60% blauen Kugeln“ $\Rightarrow p_1=0{,}6$
A={0,1....,7} und $\overline{A}$ ={8;.....20}
Fehler erster Art, also H_0 in Wirklichkeit wahr, wurde aber (fälschlicherweise) abgelehnt
$B_{20;0,25}(X=k)$
$\alpha = P(\overline{A}) = P(X\geq 8) = 1-P(X\leq 7) \approx 1-0{,}8982 = 0{,}1018 = 10{,}18\%$
Fehler zweier Art, also H_0 in Wirklichkeit falsch, wurde aber (fälschlicherweise) abgenommen.
$B_{20;0,6}(X=k)$
$\beta = P(A) = P(X\leq 7) \approx 0{,}02103 \approx 0{,}021 = 2{,}1\%$
Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art beträgt rund 10,18% und für einen Fehler 2. Art rund 2,1%.

Lösungen zur Aufg. 5:

Es liegt ein einseitiger Signifikanztest vor.

H_0: $p_0 \geq 0{,}7$

H_1: $p_1 < 0{,}7$ $\Rightarrow$ $\overline{A} = \{0,1;....k\}$ und $P(\overline{A}) < 0{,}05$

$B_{100;0,7}(X=k)$ $P(X \leq k) < 0{,}05$ und k maximal

$P(X \leq 61) \approx 0{,}034$ und $P(X \leq 62) \approx 0{,}053$ $\Rightarrow k=61 \Rightarrow \overline{A} = \{0,1;....61\}$

Da $59 \in \overline{A}$, muss die Nullhypothese, dass mindestens 70% aller PC-Nutzer des Produkt PX© verwenden, verworfen werden.

Lösungen zur Aufg. 6:

Es liegt ein zweiseitiger Signifikanztest vor.

a) H_0: faire Münze $p_0=0{,}5$

H_1 : nicht faire Münze $p_1 \neq 0{,}5$

Da zweiseitiger Test vorliegt und die Verteilung symmetrisch ist (p=0,5): $\frac{\alpha}{2}=0{,}1$

Sei k_L das Maximum des linksseitigen Ablehnungsbereichs und k_R das Minimum des rechtsseitigen Ablehnungsbereich. Dann gilt: $\overline{A} = \{0; ....; k_L\} \cup \{k_R; .....100\}$

$P(\overline{A}) = P(X \leq k_L) + P(X \geq k_R)$

$P(X \leq k_L) = 0{,}1$ $\Rightarrow$ $B_{100;0,5}(X=k)$–Tabelle ergibt: $P(X \leq 43) \approx 0{,}1$ $\Rightarrow k_L=43$

$P(X \geq k_R) = 1 - P(X < k_R) = 0{,}1$ $\Rightarrow P(X < k_R) = 0{,}9$

$B_{100;0,5}(X=k)$–Tabelle ergibt: $P(X \leq 56) \approx 0{,}9$ $\Rightarrow k_R=57$

$\overline{A} = \{0; ....; 43\} \cup \{57; .....100\}$ Da $42 \in \overline{A}$ $\Rightarrow$ Es kann davon ausgegangen werden, dass die Nullhypothese „faire Münze" abgelehnt werden kann bzw. dass die Gegenhypothese „Münze nicht fair" angenommen wird.

b) H_0: faire Münze $p_0=0{,}5$

H_1: nicht faire Münze $p_1 \neq 0{,}5$

$A = \{17;18;....32;33\}$ und $\overline{A} = \{0; ....; 16\} \cup \{34; .....50\}$

$B_{100;0,1}(X=k)$:

$\alpha = P(\overline{A}) = P(X \leq 16) + P(X \geq 34) = P(X \leq 16) + 1 - P(X \leq 33) \approx 0{,}00767 + 1 - 0{,}99233 = 0{,}01534 \approx 1{,}53\%$

Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt hier $\alpha \approx 1{,}53\%$.

Lösungen zur Aufg. 7:

a) Es liegt ein einseitiger, rechtsseitiger Test vor mit H_0: $p_0 \leq 5\%$ und n=50

Sei k die kritische Zahl. Dann gilt: $\overline{A} = \{k;k+1;...50\}$ und $A = \{0;1;....;k-1\}$

$P(\overline{A}) \leq 0{,}05$ $\Rightarrow$ $P(X \geq k) \leq 0{,}05$ $\Leftrightarrow$ $1 - P(X \leq k-1) \leq 0{,}05$ $\Leftrightarrow$ $P(X \leq k-1) \geq 0{,}95$

Die Tabelle zu $B_{50;0,05}(X=k)$ liefert:

$P(X \leq 4) \approx 0{,}8964 < 0{,}95$

$P(X \leq 5) \approx 0{,}9622 > 0{,}95$ $\Rightarrow k-1=5$ $\Rightarrow k=6$ $\Rightarrow \overline{A} = \{6;7;....;50\}$

Da $4 \notin \overline{A}$ kann der Behauptung bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,05 nicht widersprochen werden.

b) Da die Irrtumswahrscheinlichkeit geringer wird, kann man erwarten, dass sich der Abnahme-bereich vergrößert bzw. der Ablehnungsbereich verkleinert. Sei k_2 die neue kritische Zahl.

Dann soll gelten: $P(X \leq k_2 - 1) \geq 0{,}975$

Die Tabelle zu $B_{50;0,05}(X=k)$ liefert:

$P(X \leq 5) \approx 0{,}9622 < 0{,}925$

$P(X \leq 6) \approx 0{,}9882 > 0{,}925$ $\Rightarrow k_2 - 1 = 6$ $\Rightarrow k_2 = 7$ $\Rightarrow \overline{A} = \{7;....;50\}$

c) Es gilt nach a): $\overline{A} = \{6;7;....;50\}$ und $A = \{0;1;2;3,4,5\}$

H_1: $p_1=0{,}1$

gesucht: $\beta = P(A)$ mit $B_{50;0,1}(X=k)$

$\beta = P(A) = P(X \leq 5) \approx 0{,}6161 = 61{,}61\%$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art beträgt rd. 61,61%.