Lösungen zu den unbestimmten und bestimmten Integralen

Lösungen zur Aufgabe 1:

Aufg. 1.1: Für die Integrationskonstante C gilt jeweils: $C \in IR$

a) $F_1(x)=x^4-1{,}5x^2+\frac{1}{2}x+C$ b) $F_2(x)=x^4-10x^2+C$ c) $F_3(x)=asx+\frac{1}{2}as^2-3s+C$

d) $F_4(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+C$ e) $F_5(x)=\frac{-3}{c\cdot h}+C$ f) $F_6(x)=\frac{1}{3}r^3-r+C$

g) $F_7(x)=\frac{-1}{t}+\frac{1}{2\cdot t^2}+\frac{1}{2}t^2+C$ h) $F_8(x)=1/(2n)\cdot a^{2n}+C$

Aufg. 1.2:
$F_1`(x)=F_2`(x)=F_3`(x)=F_4`(x)=-2x$. Für Punkte mit demselben x-Wert ergibt sich jeweils die gleiche Steigung (–2x) und Geraden mit gleichem Steigungsfaktor sind parallel zueinander.

Aufg. 1.3:
$F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+x+C$; $C \in IR$. F(1)=2, also ergibt sich: $C=\frac{17}{12}$. Die gesuchte Stammfunktion hat die Gleichung $F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+x+\frac{17}{12}$.

Aufg. 1.4:
a) $F(x)=\frac{1}{5}x^5-x+\frac{7}{5}$ b) $F(t)=\frac{1}{4}\pi\cdot t^2-2\pi\cdot t+\frac{11}{4}\cdot\pi$ c) $F(b)=-b^{-1}+1$

Aufg. 1.5:
$f`(x)=\frac{4}{3}x^3-1{,}5\cdot x^2+x+c$ $c \in IR$ $f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+c\cdot x+b$ $b,c \in IR$

Lösungen zur Aufgabe 2: Unbestimmte Integrale

Aufg. 2.1

a) $\int f(x)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x+C$ $C \in IR$

b) $\int f(x)dx=\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{3}x^3+C$ $C \in IR$

c) $\int h(x)dx=\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{6}x^2+x+C$ $C \in IR$

d) $\int 2x(x-2)(x+2)dx=\frac{1}{2}x^4-4x^2+C$ $C \in IR$

e) $\int (\frac{x^4}{2}+\frac{2}{3}x^2-4)dx=\frac{1}{10}x^5+\frac{2}{9}x^3-4x+C$ $C \in IR$

f) $\int (\frac{x^2-1}{1+x})dx=\frac{1}{2}x^2-x+C$ $c \in IR$ (Tipp: Binom!)

g) $\int \sqrt{\frac{9}{x^4}}\,dx=\frac{-3}{x}$

Aufg. 2.2:

a) $\int (\frac{x^2+2x}{x})dx=\frac{1}{2}x^2+2x+C$ $C \in IR$

b) $\int 2dx=2x+C$ $C \in IR$

c) $\int b\,dx=b\cdot x+C$ $C \in IR$

d) $\int b\,db=\frac{1}{2}b^2+C$ $C \in IR$

e) $\int (\sin(x)dx=-\cos(x)+C$ $C \in IR$

f) $\int 3\cdot\sqrt{x}dx=2\cdot x^{1,5}+C=2\sqrt{x^3}+C$ $C \in IR$

g) $\int \frac{dx}{2}=\frac{x}{2}+C$ $C \in IR$

Lösungen zur Aufgabe 3:

Aufg. 3.1:
a) 6 b) 1,25 c) $4\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

Aufg. 3.2:
a) Vervierfachung b) Verachtfachung c) Vervierfachung d) Versechzehnfachung

Aufg. 3.3:
Zuerst müssen die Nullstellen als Intervallgrenzen bestimmt werden (quadr. Ergänzung oder pq-Formel). $-x^2+6x-8=-(x-2)(x-4)$. Also sind die Nullstellen 2 und 4.
$F(x)=-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x+c$, $c \in IR$. $F(4)-F(2)=\frac{4}{3}$. Der Flächeninhalt beträgt $\frac{4}{3}$ Flächeneinheiten.

Lösungen zur Aufgabe 4:

Aufg. 4.1:

Es ist die Funktion F mit $F(x)= \frac{1}{2}x^2+6x$ eine Stammfunktion von f.

$A_{[0;4]}$ =F(4)–F(0) = (8 + 24) – 0 = <u>32</u> $A_{[3;5]}$ =F(5)–F(3) = 42,5 – 22,5 = <u>20</u>

$A_{[-1;0]}$ = F(0)–F(-1) = 0–(-5,5) = <u>5,5</u> $A_{[-4;-2]}$ = F(-2)–F(-4) = –10+16 = <u>6</u>

Aufg. 4.2:

Zuerst: Dreieck im Koordinatensystem zeichnen!
Der Punkt (1,5|0) sei B*. Dann gilt $A_{ABC} = A_{AB^*C} + A_{B^*BC}$
Die Gerade, die durch die Punkte A,C geht, hat die Gleichung $f_1(x)=x+4$,
also $F_1(x)= \frac{2}{3}x^2+4x$ $A_{AB^*C}= A_{[-3;1,5]}=F_1(1,5)–F_1(–3)=$ <u>13,5</u>
Die Gerade durch die Punkte B,C hat die Gleichung $f_2(x)=–2x+9$, also $F_2(x)= –x^2+9x$
$A_{B^*BC}= A_{[1,5;4,5]}= F_2(4,5)–F_2(1,5)=20,25–11,25= 9$
$A_{ABC} = A_{AB^*C} + A_{B^*BC}$ = 13,5 + 9 = <u>22,5</u>
Der Flächeninhalt des Dreieckes ABC beträgt <u>22,5 Flächeneinheiten.</u>

Aufg. 4.3:

$H(x)=0,1\cdot x^2+ax$; $A_{[a;5a]}=H(5a)-H(a)=(2,5a^2+5a^2)–(0,1a^2+a^2)=\underline{6,4a^2}$

Aufg. 4.4:

Eine Stammfunktion von f ist $F(x)= \frac{0,5}{a}\cdot x^2$

$A_{[a;5a]}= F(5a)–F(a)= \frac{0,5}{a}\cdot(5a)^2 – \frac{0,5}{a}\cdot a^2=12,5a–0,5a= 12a$.

Liegt a in der Form $a = k\cdot\frac{1}{12}$ vor ($k\in$ IN), so ist $A_{[a;5a]}=12a=12\cdot k\cdot\frac{1}{12} = k$ und k ist ganzzahlig. Die Behauptung ist wahr.

Aufg. 4.5:

$f(x)=mx+b$ mit $m,b\in$ IR. $F(x)=0,5m\cdot x^2+bx$ ist eine Stammfunktion zu f.

$A_{[0;2]}$ = F(2)–F(0) = (2m+2b)–0 = 2m+2b = 4,5; $\Rightarrow$ also Gleichung I: 2m+2b=4,5

F(4) = 8m+4b = 8; $\Rightarrow$ also Gleichung II: 8m+4b=8

Das lineare Gleichungssystem lässt sich auflösen und es ergeben sich b=2,5, m= –0,25

Die gesuchte Funktion f hat die Funktionsgleichung <u>f(x) = –·0,25x+2,5</u>