

Aufgabenbereich Analysis: Lösungen

1a) Schnittpunkte x-Achse: N(4|0)

$$0 = e^x(2 - \frac{1}{2}x)$$

$$\Leftrightarrow 2 - 0,5x = 0 \quad (\text{da } e^x \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

Schnittpunkt y-Achse: P(0|2)

$$f(0) = e^0(2 - 0,5 \cdot 0) = 2$$

Asymptoten:

für $x \rightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \rightarrow 0 \Rightarrow$ Die x-Achse ist für den Graphen für $x \rightarrow -\infty$ eine Asymptote

für $x \rightarrow +\infty$ gilt: $f(x) \rightarrow -\infty$ (Überprüfung mit Hilfe des Taschenrechners genügt)

mögliche Extrema:

$$f'(x) = e^x \cdot (-\frac{1}{2}) + e^x(2 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}e^x + 2e^x - \frac{1}{2}e^x x = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}x \cdot e^x = e^x(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x)$$

$$0 = e^x(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x = 0$$

$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow$ mögliche Extremstelle bei $x = 3$

$$f''(x) = e^x(1 - \frac{1}{2}x) \quad [\text{Produktregel wie bei } f']$$

$$f''(3) = e^3(1 - 1,5) = e^3 \cdot (-\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x = 3 \Rightarrow H(3|f(3)) \Rightarrow H(3|10,04)$$

mögliche Wendestellen: $f''(x) = e^x(1 - \frac{1}{2}x)$

$$0 = e^x(1 - \frac{1}{2}x)$$

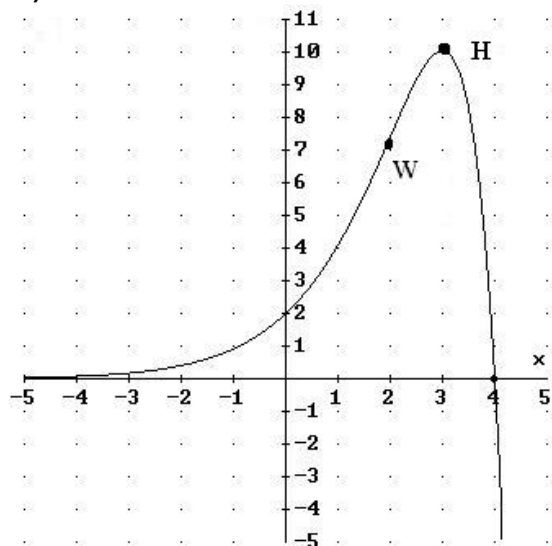
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}x = 0$$

$\Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$ mögliche Wendestelle bei $x = 2$

$$f'''(x) = e^x(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x)$$

$$f'''(2) = e^2(\frac{1}{2} - 1) = e^2 \cdot (-\frac{1}{2}) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x = 2 \Rightarrow W(2|f(2)) \Rightarrow W(2|e^2) \approx W(2|7,4)$$

1b)



1c) Zu zeigen: Die Funktionen F mit

$F(x) = e^x(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$ sind Stammfunktionen

von f, also ist zu zeigen: $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = e^x(-\frac{1}{2}) + e^x(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{5}{2}e^x - \frac{1}{2}xe^x = \frac{4}{2}e^x - \frac{1}{2}xe^x = 2e^x - \frac{1}{2}xe^x = e^x(2 - \frac{1}{2}x) = f(x)$$

1d) Gesucht ist die spezielle Stammfunktion F_c mit der Eigenschaft, dass der Graph von F_c die y-Achse (und dort den Graphen von f) im Punkt P(0|2) schneidet.

$$\text{also gilt: } F_c(0) = 2, \text{ somit } e^0 \cdot (\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0) + C = \frac{5}{2} + C = 2$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Die gesuchte Funktion hat die Gleichung

$$F_c(x) = e^x \cdot (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x) - \frac{1}{2}$$

1e) Als erstes muss die Tangentengleichung aufgestellt werden:

gesucht: $y = mx + n$ mit $m, n \in \mathbb{R}$

$$f'(0) = e^0(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0) = \frac{3}{2} \quad \text{also: } m = \frac{3}{2}$$

Da die Tangente durch den Punkt P(0|2) verläuft, hat sie den y-Achsenabschnitt 2. Somit $n = 2$

Die Tangente hat die Gleichung $y = \frac{3}{2}x + 2$

$$\int_0^{3,59} f(x) dx \approx 23,05$$

$$\int_0^{3,59} (\frac{3}{2}x + 2) dx \approx 16,85$$

$$A \approx 23,05 - 16,85 = 6,2$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt rund 6,2 FE.

1f) Sei $b \in \mathbb{R}$.

$$\int_b^4 f(x) dx = F(4) - F(b) = e^4 \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4\right) - \left[e^b \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} b\right) \right] = \frac{1}{2} e^4 - \left[e^b \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} b\right) \right]$$

$$e^b \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} b\right) \xrightarrow{b \rightarrow -\infty} 0 \quad (\text{Überprüfung mit TR})$$

Also $\frac{1}{2} e^4 - \left[e^b \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} b\right) \right] \xrightarrow{b \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^4 \approx 27,3$ Der gesuchte Flächeninhalt beträgt rd. 27,3 FE.

1g) Gesucht ist ein Intervall $[a; b]$ mit $\int_a^b f(x) dx = -\frac{5}{2}$. Wir legen sinnvoller Weise $a=0$ fest (rechenfreundlich).

$$\text{Dann folgt: } \int_a^b f(x) dx = \int_0^b f(x) dx = F(b) - F(0) = e^b \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} b\right) - \left[e^0 \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0\right) \right] = e^b \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} b\right) - \frac{5}{2}$$

$e^b \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} b\right) - \frac{5}{2}$ nimmt genau dann den Wert $-\frac{5}{2}$ an, wenn $e^b \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} b\right) = 0$

$e^b \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} b\right) = 0$ gilt, wenn $\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} b\right) = 0$ (da $e^b \neq 0$) $\Rightarrow b=5$!

Ein gesuchtes Intervall lautet $[0; 5]$.

Aufgabenbereich Analytische Geometrie: Lösungen

$$1a) \vec{a} \circ \vec{b} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 7 = 19 \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow 19 = \sqrt{11} \cdot \sqrt{53} \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) \approx 0,787 \Rightarrow \alpha \approx 38^\circ$$

$$1b) \text{ allg. Form: } \vec{x} = \vec{p}_0 + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \text{ mit } r, s \in \mathbb{R} \quad \vec{u} = \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

$$1c) \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ sei ein NV auf } \varepsilon \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

$$\vec{n} \circ \vec{u} = -x - 3y + 4z = 0$$

$\vec{n} \circ \vec{v} = 3 - 5y + 9z = 0$ Sei $x=1 \Rightarrow -3y + 4z = 1$ und $-5y + 9z = -3$ Aufgelöst nach z ergibt sich: $z = -2$
eingesetzt ergibt sich für $y: y = -3$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_0 \circ \vec{n} = 1 - 3 - 6 = -8 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \vec{n} = x - 3y - 2z \Rightarrow \text{Koordinatenschreibweise (parameterfrei):}$$

$$\varepsilon: x - 3y - 2z + 8 = 0$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14} \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \text{ ist ein ENV auf } \varepsilon.$$

$$\text{Hessesche Normalenform der Ebene: } \varepsilon: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = 0$$

1d) zu zeigen: $P(1|1|-1) \notin \eta$

$$2 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot (-1) - 12 = -12 \neq 0 \Rightarrow P(1|1|-1) \notin \eta$$

zu bestimmen: $a \in \mathbb{R}$, so dass $Q(5|-\frac{3}{2}|a) \in \eta$

$$2 \cdot 5 + (-\frac{3}{2} \cdot a) + 3 \cdot a - 12 = -2 + 1,5a \Rightarrow \text{für } a = \frac{4}{3} \text{ gilt: } -2 + 1,5a = 0 \text{ also } a = \frac{4}{3}$$

1e) $\lambda: 2x+y+3z=0$ $P(1|1|-1) \in \lambda$, denn $2 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot (-1) = 0$, zudem ist $\vec{n}_\lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein NV auf λ .

[Erinnerung: $ax+by+cz+d=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist NV auf diese Ebene). Ein Normalenvektor auf η wird genau so bestimmt:

$\vec{n}_\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Offensichtlich sind \vec{n}_λ und \vec{n}_η linear abhängig, somit sind die Ebenen parallel zueinander.

Abstand Punkt P von η :

$$h = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot (-1) + (-12)|}{\sqrt{14}} = \frac{|-12|}{\sqrt{14}} \approx 3,2$$

oder umständlich: $h = |(\vec{x} - \vec{x}_0) \circ \vec{e}_n| \Rightarrow h = \left| \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \right| = \frac{|12|}{\sqrt{14}} \approx 3,2$

1f)

Dazu betrachten wir den Schnittwinkel je eines Normalenvektors auf ϵ bzw. λ .

$\vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist bekannt. Aus der Gleichung $2x+y+3z-12=0$ für η folgt $\vec{n}_\lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein NV auf λ .

Mit der Def. des Skalarproduktes folgt:

$$\vec{n}_\epsilon \circ \vec{n}_\lambda = |\vec{n}_\epsilon| \cdot |\vec{n}_\lambda| \cdot \cos(\alpha)$$

$$7 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = 0,5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Der Schnittwinkel beträgt 60°

2a) Es existiert kein $r \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$, also sind g und h nicht zueinander parallel.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufstellen. $g=h: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$

LGS: I) $3+2 \cdot t_g = 1+t_h$
 II) $3+4t_g = 9+12t_h$
 III) $-2+4t_g = 6+14t_h$
 aus II) und III) folgt: $t_h = -1$
 t_h in II) $\Rightarrow t_g = -1,5$
 t_g und t_h in I) $\Rightarrow 3+2 \cdot (-1,5) = 0 = 1+(-1)$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + (-1,5) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow g \text{ und } h \text{ schneiden sich im Punkt } P(0|-3|-8).$$

Es existiert kein $r \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, also sind g und k nicht zueinander parallel.

$$g=k: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix} + t_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

LGS: I) $3+2t_g=t_k$

II) $3+4t_g=11 \Rightarrow t_g=2$

III) $-2+4t_g=-2+2t_k$

t_g in I) $\Rightarrow t_k = 3+2 \cdot 2=7$

t_k und t_g in III): $-2+4 \cdot 2 = 6 \neq 12 = -2+2 \cdot 7$ Widerspruch! Die Geraden g und k sind zueinander windschief.

2b) Ist P ein Schnittpunkt von I und ε , so müssen die Koordinaten des Punktes beide Gleichungen erfüllen.

$$x-3y+2,5z+1=1 \cdot 1-3 \cdot 4+2,5 \cdot 0+11=1-12+11=0 \Rightarrow P \in \varepsilon$$

P liegt auf der Geraden I, wenn ein t_l existiert mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_l \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Für } t_l = -1 \text{ wird das daraus resultierende LGS erfüllt.} \quad \text{Also: } P \in I$$

Somit ist P ein Schnittpunkt von I und ε .

Um zu zeigen, dass dies der einzige Schnittpunkt ist, reicht es bei einem weiteren Punkt der Geraden (sinnvoller Weise den Punkt (0|3|0)) zu überprüfen, ob er auf ε liegt. Denn die Gerade und die Ebene haben entweder genau einen Schnittpunkt (wie in diesem Beispiel) oder alle Punkte der Geraden als Schnittpunkte (wenn die Gerade vollständig in der Ebene liegt).

2c) zu zeigen: Zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel zueinander

Sei g die Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t_1 \cdot \vec{AB}$ und h die Gerade h: $\vec{x} = \vec{c} + t_2 \cdot \vec{CD}$. Die Richtungsvektoren $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

und $\vec{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind lin. abhängig, da $(-2) \cdot \vec{CD} = \vec{AB}$. Also sind die Gerade g und h parallel zueinander und

somit die entsprechenden Seiten des Trapezes ebenso.

$|\vec{AB}| = \sqrt{36} = 6$; $|\vec{CD}| = \sqrt{9} = 3$ Somit gilt: $2 \cdot |\vec{CD}| = |\vec{AB}|$. Die Seite c ist also nur halb so lang wie die Seite a.

2d) $A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -24 \\ 20 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{65} \approx 16,12$ (doch, haben wir im Unterricht gemacht! ☺)

Das Dreieck ABC hat den ungefähren Flächeninhalt 16,12 FE.

2e) Wir bestimmen den Abstand des Punktes S(4|0|7) von der Ebene ε (in der ABC liegt).

1. Möglichkeit: $\varepsilon: x-3y+2,5z+11=0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ ist ein NV auf ε . $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{16,25}} \\ \frac{-3}{\sqrt{16,25}} \\ \frac{2,5}{\sqrt{16,25}} \end{pmatrix}$ ist ein ENV auf ε .

$$h = |(\vec{x} - \vec{x}_0) \circ \vec{e}_n| = |(\vec{s} - \vec{a}) \circ \vec{e}_n| = \left| \frac{65}{\sqrt{65}} \right| = \sqrt{65} \approx 8,1$$

2. Möglichkeit: (einfacher) $: h = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 \cdot 4 - 3 \cdot 0 + 2,5 \cdot 7 + 11|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2,5^2}} = \frac{|32,5|}{\sqrt{16,25}} \approx 8,1$ Die Höhe der Pyramide

beträgt ca. 8,1 LE.

Aufgabenbereich Stochastik: Lösungen

1a)

Anzahl Mädchen: $\frac{2}{3} \cdot 15 = 10$, davon werden 6 ausgesucht.

$$\binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210 \quad \text{Es gibt 210 Möglichkeiten.}$$

andere Überlegung:

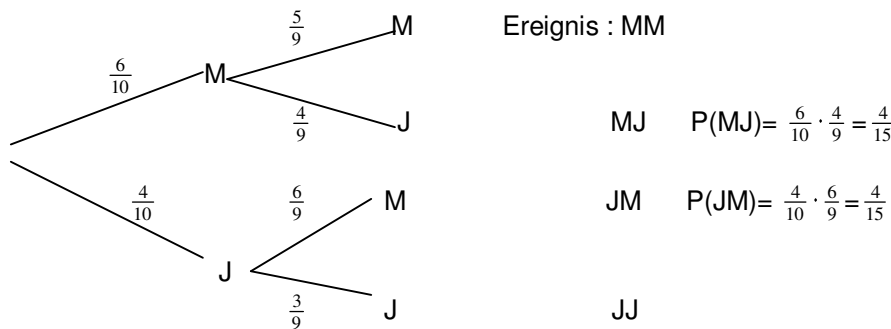
Für das erste Mädchen gibt es 10 Möglichkeiten, für das zweite 9 usw., also $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ Möglichkeiten. Dann ist jedoch die Reihenfolge von Bedeutung, da aber die Gruppe ABCDEF identisch ist mit der Gruppe BACDEF u.s.w. müssen wir noch feststellen, wie viele Gruppen mit den Personen A,B,C,D,E und F es gibt: Für A gibt es 6 Möglichkeiten, für B 5 Möglichkeiten u.s.w. also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.

Also gibt es $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ Möglichkeiten.

1b)

Für die Jungen gibt es 4! Möglichkeiten, für die Mädchen 6! Möglichkeiten, also $6! \cdot 4! = 17280$ Möglichkeiten.

1c)



Ereignis E: "nicht gleichgeschlechtlich"

Wir betrachten die Teilereignisse MJ und JM. Die Wahrscheinlichkeit für solch ein Ereignis ergibt sich nach der Pfadregel als Produkt der Wahrscheinlichkeiten eines Pfades. Da beide Ereignisse MJ und JM die Bedingung „nicht gleichgeschlechtlich“ erfüllen, müssen diese Wahrscheinlichkeiten addiert werden.

$$P(E) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = 0,53 \approx 53\%$$

1d)

Wahrscheinlichkeit für Erkrankung: $p = 6\% = 0,06$

Wahrscheinlichkeit, gesund zu bleiben: $q = 1 - p = 0,94$.

$$P = 0,94^3 \approx 0,83 = 83\%$$

(Beweis über Binomialverteilung möglich, aber umständlich)

1e)

Zugehörige Binomialverteilung $B_{n;p}$ mit $n = 10$, $p = 10\% = 0,1$ und $q = 1 - p = 0,9$, also $B_{10;0,1}(X = k)$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$\binom{10}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^8$$

$$\approx 1 \cdot 1 \cdot 0,35 + 10 \cdot 0,1 \cdot 0,39 + 45 \cdot 0,01 \cdot 0,43 = 0,9335 = 93,35\%$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 93,35%

1f)

$$\mu = E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0,1 = 1$$

k^* sei das Maximum der Verteilung.

$$\mu - q < k^* < \mu + p. \Rightarrow 1 - 0,9 < k^* < 1 + 0,1$$

$$\Rightarrow 0,1 < k^* < 1,1$$

$$\Rightarrow k^* = 1, \text{ da } k^* \in \mathbb{N}_0 \text{ sein muss.}$$

1g)

gesucht: $n \in \mathbb{N}_0$ alle Jugendliche gesund \Rightarrow kein Jugendlicher krank, also $P(X=0)=59\%=0,59$

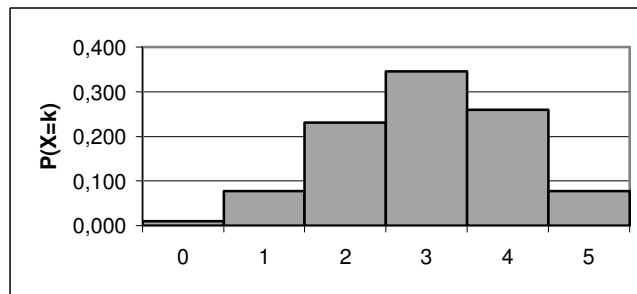
$$P(X=0) = \binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,9^n = 0,9^n = 0,59 \text{ also muss für } n \text{ gelten: } 0,9^n = 0,59$$

$$\ln(0,9^n) = \ln(0,59) \Rightarrow n \cdot \ln(0,9) = \ln(0,59) \Rightarrow n = \frac{\ln(0,59)}{\ln(0,9)} \approx 5,01. \text{ Also dürften nur 5 Jugendliche mitfahren.}$$

2a)

Der Zufallsversuch "Schiessen auf Scheibe" hat nur zwei mögliche Ergebnisse, "Treffer" oder "kein Treffer". Das Ergebnis "Treffer" interpretieren wir als Erfolg. Es handelt sich also um einen Bernoulli-Versuch. Wird der Versuch nun 5 mal wiederholt, ändert sich die Erfolgswahrscheinlichkeit $p=0,6$ bei jedem Versuch nicht. Es liegt also ein 5-stufiger Bernoulli-Versuch vor. Deshalb kann die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis "Anzahl der Treffer" als Binomialverteilung angesehen werden.

k	P(X=k)
0	0,010
1	0,077
2	0,230
3	0,346
4	0,259
5	0,078



Tabelle

Histogramm

2b)

$$P(X>3) = P(X=4) + P(X=5) \approx 0,259 + 0,078 = 0,337 \Rightarrow \text{Die Wahrscheinlichkeit beträgt rd. 33,7\%}$$

2c) $E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0,6 = 3$ Ein Schütze kann pro Serie 3 Treffer erwarten.

2d)

Neue Binomialverteilung $B_{7;0,01}(X=k)$ [p in Aufgabenteil 2a) errechnet]
 $n=7$ und $p=0,01$ berechnet („keinen Treffer in einer Serie“, also $k=0$)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left[\binom{7}{0} \cdot p^0 \cdot p^7 \right] \approx 1 - [1 \cdot 1 \cdot 0,99^7] = 0,068 = 6,8\%.$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei 7 Serien mindestens eine Serie ohne Treffer aufzuweisen, beträgt rd. 6,8%.