Lösungen zu den Stammfunktionsaufgaben

Lösungen zur Aufg. 1:

a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

b) $F(x) = x^2 - 3x$

c) $F(x) = 2x^2 + x$

d) $F(x) = 27x^3 + x^2$

e) $F(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x$

f) $F(x) = 4x^4 - 2x^3$

g) $F(x) = -\frac{3}{7}x^4 - 6x^2 + \frac{1}{2}x$

h) $F(x) = \frac{1}{9}x^6 - 50x^2$

i) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$

Lösungen zur Aufg. 2:

a) $F(x)= 6x+\frac{4}{x^2}$

b) $F(x)= \frac{1}{2}x^2-\frac{2}{x}$

c) $F(x)= x^2+\frac{3}{x^2}$

d) $f(x)=\frac{6}{x^3}-\frac{x}{x^3}=6\cdot x^{-3}-x^{-2} \quad \Rightarrow F(x)= -\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}$

Lösungen zur Aufg. 3:

a) $F(x) = -\cos(x)$

b) $F(x) = -\cos(x) + 3x$

c) $F(x) = 4x^2 - \cos(x)$

d) $F(x) = \sin(x)$

e) $F(x) = \sin(x) - x\cdot\cos(x)$

Lösungsweg für e): Gesucht ist eine Stammfunktion F von f und zwei Funktionen g und h mit $F(x)=g(x)\cdot h(x)$ (da die Ableitungsfunktion von F ein Produkt von Funktionen ist). Für g und h gilt dann nach der Produktregel:
$g`(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h`(x) = F`(x) = f(x) = \sin(x)+x\cdot\cos(x)$. Sinnvoll erscheint es jetzt die beiden Fkt. wie folgt zu definieren: $g(x)=x \Rightarrow g`(x)=1$ und $h(x)= \sin(x) \Rightarrow h`(x)=\cos(x)$. Somit ist $F(x)=x\cdot\sin(x)$ und es gilt:
$F`(x) = g`(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h`(x) = 1\cdot\sin(x) + x\cdot\cos(x) = \sin(x)+x\cdot\cos(x) = f(x)$
Eine Stammfunktion lautet $F(x)=x\cdot\sin(x)$.

Lösung zur Aufg. 4:

$f(x)= (x+3)^2-2=x^2+6x+7$; $F`(x)=3bx^2+6x+7 \Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f, wenn $b=\frac{1}{3}$

Der gesuchte Parameter lautet $b=\frac{1}{3}$

oder: F_1 mit $F_1(x)= \frac{1}{3}x^3+3x+7x$ ist eine Stammfunktion von f. $F=F_1$, wenn $b=\frac{1}{3}$.

Lösung zur Aufg. 5:

$F(x)=\frac{3}{2}x^2-4x+C$; $C\in IR$ Scheitelpunkt $S(x_S|\frac{2}{3})$

F hat bei x_S ein lokales Minimum

$\Rightarrow$ Die erste Ableitungsfunktion von F hat bei x_S eine Nullstelle, da $F`=f$ (Definition!) muss gelten:
$f(x_S)=0$, also $0=3x_S-4 \Leftrightarrow x_S=\frac{4}{3}$

Scheitelpunkt $S(\frac{4}{3}|\frac{2}{3})$.

Nun: Bestimmung von C für $F(x)=\frac{3}{2}x^2-4x+C$.

Da S auf dem Graphen von F liegt, erfüllen die Koordinaten die Funktionsgleichung,
also $F(\frac{4}{3})= \frac{2}{3} = \frac{3}{2}\cdot(\frac{4}{3})^2-4\cdot\frac{4}{3}+C \Leftrightarrow C=\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

Die gesuchte Stammfunktion
ist F mit $F(x)= \frac{3}{2}x^2-4x+3\frac{1}{3}$

Skizze: