Lösungen zum Thema Stochastik: Stichproben & Kombinatorik

Lösung zur Aufg. 1:

n verschiedene Elemente Umfang der Stichprobe: **k**	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
geordnete Stichproben (Reihenfolge wird beachtet)	n^k	**n·(n–1)·(n–2)·...·(n–k+1)** Sonderfall: n=k $\Rightarrow$ **n!**
ungeordnete Stichproben (Reihenfolge wird nicht beachtet)		$\binom{n}{k}$

Lösung zur Aufg. 2:

400.000 : 3 = $133.333,\overline{3}$ $\Rightarrow$ 133.334 Nummern werden benötigt.
5-stellige Nummern: 9·10·10·10·10 = 90.000 < 133.334
6-stellige Nummern: 9·10·10·10·10·10 = 900.000 > 133.334
Es werden (mindestens) 6-stellige Telefonnummern benötigt

Lösungen zur Aufg. 3:

Es handelt sich um das Urnenmodell ohne Zurücklegen. Ein Baumdiagramm ist möglich, Lösung aber auch ohne Baumdiagramm ermittelbar.

4 Möglichkeiten: KPPP PKPP PPKP PPPK $P(A) = 4\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = 4\cdot\frac{96}{1680} \approx 0{,}2256 = 22{,}56\%$
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A beträgt **22,56%.**

6 Möglichkeiten: KKPP KPKP KPPK PKPK PPKK PKKP
$P(B) = 6\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} = 6\cdot 0{,}0857 = 0{,}5142 = 51{,}42\%$
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B beträgt **51,42%.**

mindestens ein Karo $\triangleq$ nicht kein Karo
P(„kein Karo“) = $\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} \approx 0{,}0143$ $P(C) \approx 1–0{,}0143 = 0{,}9857 = 98{,}57\%$
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C beträgt **98,57%.**

„Die ersten drei sind Karo“ bedeutet: Die vierte Karte wird nicht beachtet, kann also auch Karo sein. Sonst hätte es „nur die ersten 4 Karten“ geheißen. $P(D) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} \approx 0{,}0714 = 7{,}14\%$
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis D beträgt **7,14%.**

2 Möglichkeiten: KPKP PKPK $P(E) = 2\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} \approx 0{,}1714 = 17{,}14\%$
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E beträgt **17,14%.**

Lösungen zur Aufg. 4:

Möglichkeiten für A_1: 6·5·4·3·2= 720 Möglichkeiten insg.: 6^5=7.776 $P(A_1) = \frac{720}{7776} \approx 0{,}0926 = 9{,}26\%$
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_1 beträgt $P(A_1) \approx$ **9,26%**

Möglichkeiten für A_2: X seien die gleichen Zahlen, O die davon verschiedene Zahl.
Dann gibt es folgende Möglichkeiten:
XXXXO; XXXOX; XXOXX; XOXXX; OXXXX also 5 Möglichkeiten (5 Pfade im Baumdiagr.)
Die Wahrscheinlichkeit für eine Kombination ist: $P(XXXXO) = \frac{6\cdot1\cdot1\cdot1\cdot5}{6^5} = \frac{30}{7776} \approx 0{,}0039$
Für den ersten Wurf 6 Möglichkeiten, für den 2. und dritten und vierten ist die Zahl dann festgelegt und für den 5. Wurf gibt es 6-1=5 Möglichkeiten.
4·0,0039=0,0156=1,56% Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_2 beträgt $P(A_2)\approx$**1,56%.**

Möglichkeiten für A_3: $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^5$ Möglichkeiten insg.: 6^5 = 7.776 $P(A_3) = \frac{3^5}{7776} \approx 0{,}0313$ = **3,13%**
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_3 beträgt $P(A_2)\approx$**3,13%.**

Die erste Zahl kann gerade oder ungerade sein, also 2 Möglichkeiten.
Möglichkeiten GUGUG: 3·3·3·3=36 Möglichkeiten UGUGU: 3·3·3·3·3
$P(A_4) = 2\cdot\frac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{6^5} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\%$ Die Wahrscheinlichkeit für A_4 beträgt $P(A_4)\approx$ **6,25%**

Lösungen zur Aufg. 5:

$P(A_1)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}\approx 0{,}0123=1{,}23\%$. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_1 beträgt $P(A_1)\approx 1{,}23\%$.
zusätzlich: Kugel mit Buchstabe B: $P(X)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\approx 0{,}0078=0{,}78\%$ zusätzlich: Kugel mit Buchstabe O: $P(X)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\approx 0{,}0156=1{,}56\%$ Die Wahrscheinlichkeit für das Wort Boot erhöht sich auf **1,56%,** wenn eine Kugel mit O dazu gelegt wird und sie verringert sich auf **0,78%,** wenn eine Kugel mit B dazu gelegt wird.

Lösung zur Aufg. 6:

Es handelt sich um eine Stichprobe ohne Zurücklegen. Insgesamt gibt es 18·17·16 Möglichkeiten, die 18 Fahrer auf den ersten drei Plätzen anzuordnen.

$P(X)=\frac{1}{18\cdot 17\cdot 16}\approx 0{,}0002=0{,}02\%$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt rd. **0,02%.**

Lösungen zur Aufg. 7:

a) Für die erste Ziffer gibt es 9 Möglichkeiten (keine Null), für die Endziffer gibt es 5 Möglichkeiten (1;3;5;7;9) und für die anderen drei Stellen je 10 Möglichkeiten.
Also: 9·10·10·10·5=45.000 Es gibt 45.000 fünfstellige ungerade Zahlen.

b) Für die erste Ziffer gibt es 4 Möglichkeiten (2;4;6;8), für die anderen Ziffern jeweils 5 Möglichkeiten (2;4;6;8;0). Also: 4·5·5·5·5=2500 fünfstellige Zahlen mit geraden Ziffern.
Damit von diesen Zahlen eine Zahl größer als 30.000 ist, darf die erste Ziffer nicht 2 sein, also 4,6 oder 8. 3·5·5·5·5=1875 Es gibt 1875 fünfstellige Zahlen mit geraden Ziffern größer als 30.000.

Lösung zur Aufg. 8:

Es müssen 2 von 32 Teams ausgewählt werden, also $\binom{32}{2}$ = 496. Es gibt also (theoretisch) 496 Finalbegegnungen. $P(X)=\frac{1}{496}\approx 0{,}002=0{,}2\%$

(andere Möglichkeit: $P(X)=2\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{31}$, „mit Zurücklegen" und die Partie Deutschland-Italien ist identisch mit der Partie Italien-Deutschland, deshalb die Verdoppelung)

Die Wahrscheinlichkeit, die Finalbegegnung zu tippen, liegt bei rd. **0,2%.**

Lösung zur Aufg. 9:

Wir bestimmen 5 Schüler aus 24 Schülern, also „5 aus 24": $\binom{24}{5}$ = 42.504.

Es gibt 42.504 Möglichkeiten, aus 24 Schülern eine 5-er Gruppe zusammenzustellen.

Lösung zur Aufg. 10:

Für die „Große Straße" gibt es nur die beiden Kombinationen 1-2-3-4-5 und 2-3-4-5-6.
Insgesamt gibt es $6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6=6^5$ Möglichkeiten.
Für 1-2-3-4-5 gibt es 5·4·3·2·1=120 Permutationen. Für 2-3-4-5-6 ebenfalls 120 Permutationen. $P(X)=\frac{2\cdot 120}{6^5}\approx 0{,}0309=3{,}09\%$. Die Wahrscheinlichkeit für eine „Große Straße" beim Kniffel beträgt ca. **3,09%.**

Lösungen zur Aufg. 11:

a) Möglichkeiten insgesamt: 8·7=56 . Es gibt insgesamt 56 Möglichkeiten.
b) Möglichkeiten: 5·4+3·2=26 Es gibt 26 Möglichkeiten.
c) Mindestens ein Mann: MM oder MF oder FM
Anzahl Möglichkeiten MM: 5·4 Anzahl Mögl. MF: 5·3 Anzahl Mögl. FM: 3·5
Möglichkeiten „mind. ein Mann" 5·4+5·3+3·5=50 Es gibt 50 Möglichkeiten, bei denen mindestens ein Mann dabei ist.

Lösungen zur Aufg. 12:

a) 8! = 40.320 Es sind 40.320 Abschlusstabellen möglich.
b) Die Anzahl der Möglichkeiten ändert sich nicht durch die Anzahl der Spieltage, also auch hier 8! Abschlusstabellen.
c) Da nur noch 7 freie Plätze zur Verfügung stehen: 7! = 5.040 Abschlusstabellen. Es sind nun nur noch 5.040 verschiedene Abschlusstabellen möglich.

Lösung zur Aufg.13:

Wir betrachten die Aufgabe in Stufen:
7 Stühle von 10 Stühlen sind ausgewählt worden. Also gibt es „7 aus 10" Möglichkeiten gerade diese 7 Stühle auszuwählen. Noch haben wir aber nicht beachtet, dass diese 7 Stühle in verschiedenen Kombinationen (Permutationen) besetzt werden können.
Wenn sich die 7 Schüler auf die ausgewählten Stühle setzen wollen, gibt es 7! Möglichkeiten, diese Stühle zu besetzten.

Also $\binom{10}{7} \cdot 7! = 120 \cdot 5040 = 604.800$.

Es gibt <u>604.800</u> Möglichkeiten, 7 Schüler auf 10 Stühlen zu verteilen.

Lösungen zur Aufg. 14:

Ist 1 bei den gezogenen Zahlen, so sind nur folgende Kombinationen möglich:
1-2-3; 1-2-4; 1-2-5; 1-2-6; 1-3-4; 1-3-5 (Reihenfolge ohne Bedeutung)
Ist 2, aber nicht 1 bei den gezogenen Zahlen dabei, so ist nur noch 2-3-4 möglich.
Sind 1 und 2 nicht bei den gezogenen Zahlen dabei, dann sind die Zahlen mindestens 3,4,5, also 3+4+5=12>10. Sind die Zahlen 1 oder 2 dabei, so haben wir vorher schon alle Fälle betrachtet. Insgesamt gibt es also 7 verschiedene Kombinationen, wobei die Reihenfolge nicht beachtet wird.

Insgesamt gibt es aber $\binom{7}{3}$ = 35 Möglichkeiten, drei der Zahlen aus der Menge auszuwählen („3 aus 7"). Also: $P(X) = \frac{7}{35} = 0{,}2 = 20\%$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der drei gezogenen Zahlen kleiner als 10 ist, beträgt <u>**20%.**</u>