Lösungen zu weiteren Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1. Poisson-Verteilung

Lösungen zur Aufg. 1.1:

a) $\mu=2$; $k=0$; $P(X=k)=\frac{\mu^k\cdot e^{-\mu}}{k!}$

$P(X=0)=\frac{2^0\cdot e^{-2}}{0!}=e^{-2}\approx 0{,}1353 =$ **13,53%**

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in der nächsten Woche keinen Unfall auf der Landstraße gibt, beträgt rund 13,53%.

b) $\mu=4$ $k=3$ $P(X<3)$ gesucht

$P(X<3) = P(X\le 2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = \frac{4^0\cdot e^{-4}}{0!}+\frac{4^1\cdot e^{-4}}{1!}+\frac{4^2\cdot e^{-4}}{2!}\approx 0{,}0183+0{,}0733+0{,}1465$
$=0{,}2381 =$ **23,81%**

Die Wahrscheinlichkeit, dass an zwei Tagen zusammen weniger als drei Notrufe eingehen, beträgt rund 23,81 %.

Lösungen zur Aufg. 1.2:

a) Binomialverteilung:

$n=450$, $p=\frac{1}{365}$, $k=2$

$P(X=2)=\binom{450}{2}\cdot\left(\frac{1}{365}\right)^2\cdot\left(\frac{364}{365}\right)^{448}\approx 0{,}2219 =$ **22,19%**

Poissonverteilung

$\mu=n\cdot p=\frac{450}{365}=\frac{90}{73}$

$P(X=2)=\frac{\mu^2\cdot e^{-\mu}}{2!}\approx 0{,}2215=$**22,15%**

b) $P(X=0)=\frac{\mu^0\cdot e^{-\mu}}{0!}=e^{-\mu}=0{,}178 \Leftrightarrow \ln(e^{-\mu})=\ln(0{,}178) \Leftrightarrow -\mu=\ln(0{,}178) \Leftrightarrow \mu\approx 1{,}72597$

aus $\mu=n\cdot p$ folgt: $n\approx 1{,}72597\cdot 365=629{,}98$ $\Rightarrow$ 630 Personen müssen im Dorf leben.

Lösungen zur Aufg. 1.3:

$P(X>5)=1-P(X\ge 5)=1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5))\approx 0{,}0839=$ **8,39%**

Wie Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert größer 5 annimmt, beträgt rd. 8,39%.

Lösungen zur Aufg. 1.4:

a) Poisson-Verteilung: $p=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ $n=10$ $\mu=n\cdot p=10\cdot\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$

$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-e^{-\frac{10}{9}}\approx 0{,}6708 =$ **67,08%**

b) Normalverteilung: $\delta=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{10\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}}\approx 0{,}9938$

$P(X\ge 1)=1-P(X\le 1)\approx 1-\Phi\left(\frac{1-\frac{10}{9}}{0{,}9938}\right)\approx 1-\Phi(-0{,}1118)=1-(1-\Phi(0{,}1118))=\Phi(0{,}1118)=0{,}5438=$ **54,38%**

c) Moivre-Laplace-Näherung:

$P(X\ge 1)=1-P(X\le 1)\approx 1-\Phi\left(\frac{1+0{,}5-\frac{10}{9}}{0{,}9938}\right)\approx 1-\Phi(0{,}3913)\approx 1-0{,}6517=0{,}3483=$ **34,83%**

d) Binomialverteilung: $n=10$, $k=1$ $p=\frac{1}{9}$

$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\left(\frac{1}{9}\right)^0\left(\frac{8}{9}\right)^{10}\approx 1-0{,}3079=0{,}6921=$ **69,21%**

Die starke Abweichung der Normalverteilung vom Ergebnis der Biomialverteilung lässt sich damit erklären, dass es sich um eine diskrete und nicht um eine stetige Zufallsgröße handelt.

Die Abweichung nach Poisson ist relativ gering, obwohl $p=\frac{1}{9}>0{,}1$ und $n=10<100$.

Die starke Abweichung nach Moivre-Laplace lässt sich damit erklären, dass das Moivre-Laplace-Kriterium $\sigma>3$ bzw. $V(X)>9$ nicht erfüllt ist (hier: $\sigma\approx 1$).

2. Moivre-Laplace-Näherung

Lösungen zur Aufg. 2.1:

E(X) = μ = n·p = 350·0,12 = 42

n=350; p=0,12; q=1–p=1–0,12=0,88

$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{350\cdot 0{,}12\cdot 0{,}88}\approx 6{,}08>3$ Damit ist das Moivre-Laplace-Kriterium $\sigma>3$ erfüllt.

$P(X\leq 50)=\Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)\approx\Phi\left(\frac{50+0{,}5-42}{6{,}08}\right)\approx\Phi(1{,}4)\approx 0{,}9192$ = **91,92%**

$P(X\leq 30)=\Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)\approx\Phi\left(\frac{30+0{,}5-42}{6{,}08}\right)\approx\Phi(-1{,}89)=1-\Phi(1{,}89)\approx 1-0{,}9708=0{,}0292$ = **2,92%**

$P(X>45)=1-P(X\leq 45)\approx 1-\Phi\left(\frac{45+0{,}5-42}{6{,}08}\right)=1-\Phi(0{,}58)\approx 1-0{,}7190=0{,}281$ = **28,1%**

$P(40<X<70)=P(X<70)-P(X<40)\approx\Phi\left(\frac{69+0{,}5-42}{6{,}08}\right)-\Phi\left(\frac{40+0{,}5-42}{6{,}08}\right)\approx\Phi(4{,}52)-\Phi(-0{,}25)\approx$

$\Phi(4{,}52)-(1-\Phi(0{,}25))=\Phi(4{,}52)-1+\Phi(0{,}25)\approx 1-1+0{,}5987=$ **59,87%**

(Hinweis: Für $\Phi(z)$ mit z≥3,5 setzen wir $\Phi(z)\approx 1=100\%$, siehe Tabellen zur Standardnormalverteilung)

Lösungen zur Aufg. 2.2:

Da k=175 ist gilt: $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{175\cdot 0{,}2\cdot 0{,}80}\approx 5{,}29>3$

Da n≥k sein muss, gilt für $B_{n;0,2}(X=k)$: $\sigma\approx 5{,}29>3$ Also kann die Näherung nach Moivre-Laplace verwendet werden.

$E(X)=\mu=n\cdot p=n\cdot 0{,}2$

$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{n\cdot 0{,}2\cdot 0{,}80}=\sqrt{n\cdot 0{,}16}=0{,}4\cdot\sqrt{n}$

Es gilt für das gesuchte $n\in\mathbb{N}$:

$P(X\leq 175)\approx\Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)\approx\Phi\left(\frac{175+0{,}5-0{,}2\cdot n}{0{,}4\cdot\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\frac{175{,}5-0{,}2\cdot n}{0{,}4\cdot\sqrt{n}}\right)\approx 0{,}999$

Für z=3,08, z=3,09; z=3,1 gilt laut Tabelle (Formelsammlung Cornelsen): $\Phi(z)\approx 0{,}999$

Wir verwenden den mittleren Wert z=3,09.

$\Rightarrow\frac{175{,}5-0{,}2\cdot n}{0{,}4\sqrt{n}}\approx 3{,}09 \Leftrightarrow 175{,}5-0{,}2\cdot n\approx 1{,}236\cdot\sqrt{n} \Leftrightarrow 877{,}5-n\approx 6{,}18\cdot\sqrt{n}$

2. Lösungsmöglichkeiten der Gleichung

Substitution:

Sei $x=\sqrt{n}$

$877{,}5-x^2\approx 6{,}18\cdot x$

$\Leftrightarrow x^2+6{,}18x-877{,}5\approx 0$

pq-Formel oder quadr. Ergänzung:

$x_1\approx 26{,}69 \Rightarrow$ Resub.: $n_1\approx 712{,}36$

$x_2\approx -32{,}87 \Rightarrow$ Resub.: $n_2\approx 1080{,}43$

Quadratische Ergänzung mit $n=\left(\sqrt{n}\right)^2$

$\left(\sqrt{n}\right)^2+6{,}18\sqrt{n}-877{,}5\approx 0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{n}+3{,}09\right)^2-3{,}09^2-877{,}5\approx 0$

$n_1\approx\left(\sqrt{887{,}0481}-3{,}09\right)^2\approx 713$

$n_2\approx\left(-\sqrt{887{,}0481}-3{,}09\right)^2\approx 1081$

Beide Ergebnisse müssen mit P(X≤175) überprüft werden. Nur n≈713 ist eine Lösung der Gleichung. Die Kette muss die Länge n=713 haben.

3: Hypergeometrische Verteilungen

Lösungen zur Aufg. 3.1:

Es gilt: $P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ mit N=100; M=8; n=5

a) $P(X=1)=\frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{100-8}{5-1}}{\binom{100}{5}}=\frac{8\cdot 2794155}{75287520}\approx 0{,}2969$ = **29,69%**

b) P(X=0)= $\frac{\binom{8}{0}\cdot\binom{100-8}{5-0}}{\binom{100}{5}}$ ≈0,6532 = **65,32%**

c) P(X≥1)=1–P(X=0) ≈ **34,64%**

d) P(X=4)= $\frac{\binom{8}{4}\cdot\binom{100-8}{5-4}}{\binom{100}{5}}$ ≈0,000.0856 ≈ **0,008.6%**

e) P(X=5)= $\frac{\binom{8}{5}\cdot\binom{100-8}{5-5}}{\binom{100}{5}}$ ≈0,000.000.74 ≈ **0,000.074%**

f) Die Wahrscheinlichkeit, dass der zuerst gezogene Streichholz nicht defekt ist, beträgt $\frac{92}{100}$, dass der zweite gezogene nicht defekt ist dann noch $\frac{91}{99}$ u.s.w.

Also P(X=0)= $\frac{92}{100}\cdot\frac{91}{99}\cdot\frac{90}{98}\cdot\frac{89}{97}\cdot\frac{88}{96}$ ≈0,6532 = **65,32%**

Lösungen zur Aufg. 3.2:

Es gilt: P(X=k)= $\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ mit N=49; M=6; n=6 ⇒ P(X=3)= $\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{49-6}{6-3}}{\binom{49}{6}}$ ≈0,0177 = **1,77%**

Lösungen zur Aufg. 3.3:

a) Es gilt: P(X=k)= $\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ mit N=50; M=5; n=3 ⇒ P(X=2)= $\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{50-5}{3-2}}{\binom{50}{3}}$ ≈0,023 = **2.3%**

b) E(X)=n· $\frac{M}{N}$ =3· $\frac{5}{50}$ = **0,3** Wir können durchschnittlich "0,3 beschädigte Uhren" erwarten, also bei jeder 3 bis 4 Stichprobe eine beschädigte Uhr.

Lösungen zur Aufg. 3.4:

a) Es gilt: P(X=k)= $\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ mit N=13; M=5; n=4 ⇒ P(X=2)= $\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{13-5}{4-2}}{\binom{13}{4}}$ ≈0,3916 = **39,16%**

b) P(X=4)= $\frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{13-5}{4-4}}{\binom{13}{4}}$ ≈0,007 = **0,7%**

c) Es gilt: P(X=k)= $\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ mit N=13; M=8; n=4 ⇒ P(X=4)= $\frac{\binom{8}{4}\cdot\binom{13-8}{4-4}}{\binom{13}{4}}$ ≈0,0979 = **9,79%**

Lösungen zur Aufg. 3.5:

Keine beschädigte Kugel: P(X=0)= $\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ mit N=50; M=5; n=4 ⇒ P(X=0)= $\frac{\binom{5}{0}\binom{45}{4}}{\binom{50}{4}}$ ≈ 0,647

Eine beschädigte Kugel: P(X=1)= $\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ mit N=50; M=5; n=4 ⇒ P(X=1)= $\frac{\binom{5}{1}\binom{45}{3}}{\binom{50}{4}}$ ≈ 0,3081

P(X)≈0,647+0,3081=0,9551 = **95,51%**

Der Abnehmer wird einen Karton mit der Wahrscheinlichkeit von rd. 95,51% akzeptieren.

Lösungen zur Aufg. 3.6:

Sei n die Anzahl an blauen Kugeln in der Urne. Dann sind in der Urne insgesamt 2·n Kugeln, 2 Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen, beide Kugeln sollen blaue Kugeln sein und es gilt dann: P(X=2)=$\frac{7}{29}$

$$P(X=2) = \frac{\binom{n}{2}\cdot\binom{2n-n}{2-2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{0}}{\binom{2n}{2}} \overset{[1]}{=} \frac{\binom{n}{2}\cdot 1}{\binom{2n}{2}} \overset{[2]}{=} \frac{\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}}{\frac{(2n)!}{2!\cdot(2n-2)!}} \overset{[3]}{=} \frac{n!\cdot 2!\cdot(2n-2)!}{2!\cdot(n-2)!\cdot(2n)!}$$

$$\overset{[4]}{=} \frac{n!\cdot(2n-2)!}{(n-2)!\cdot(2n)!} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}^{n!}\cdot(2n-2)!}{(n-2)!\cdot(2n)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\overbrace{(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}^{(n-2)!}\cdot(2n-2)!}{(n-2)!\cdot(2n)!}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!\cdot(2n-2)!}{(n-2)!\cdot(2n)!} \overset{[4]}{=} \frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-2)!}{(2n)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-2)!}{\underbrace{(2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}_{(2n)!}}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-2)!}{(2n)\cdot(2n-1)\cdot\underbrace{(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}_{(2n-2)!}} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-2)!}{(2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)!} \overset{[4]}{=} \frac{n\cdot(n-1)}{(2n)\cdot(2n-1)}$$

$$\overset{[5]}{=} \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot n\cdot(2n-1)} \overset{[4]}{=} \frac{(n-1)}{2\cdot(2n-1)} \overset{[5]}{=} \frac{n-1}{2\cdot(2n-1)} \overset{[5]}{=} \frac{n-1}{4n-2}$$

Mit P(X=2)=$\frac{7}{29}$ gilt somit: $\frac{n-1}{4n-2} = \frac{7}{29}$

$\Leftrightarrow$ 29·(n–1) = 7·(4n–2)

$\Leftrightarrow$ 29n –29 = 28n –14

$\Leftrightarrow$ n –29 = –14

$\Leftrightarrow$ n = 15

Es sind 15 blaue Kugeln und somit insgesamt **30 Kugeln** in der Urne.

(Erklärung: [1]: $\binom{n}{0}=1$ für alle $n\in IN$; [2]: Definition von „n über k“ verwendet; [3]: Auflösung des Doppelbruchs $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$; [4]: Kürzen des Zählers und des Nenners mit dem gleichen Faktor; [5]: Klammern auflösen).