Aufgabe:

Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion f mit f(x)=$\frac{x^4-10x^2+9}{x^2}$.

1) Bestimmen Sie die Definitionsmenge von f und untersuchen Sie f auf Symmetrie.

2) Bestimmen Sie die möglichen Schnittpunkte des Graphen von f mit den Achsen und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereiches.

3) Bestimmen Sie mögliche Extrema und Wendepunkte von f.
$\left[Kontrollangabe: f'(x) = \frac{2x^4-18}{x^3} \right]$

4) Begründen Sie (ohne Grafik): Für die Wertemenge von f gilt: $W_f=IR_{\geq -4}$

5) Zeichnen Sie den Graphen von f und mögliche Asymptoten unter Verwendung der in 1-4) erzielten Erkenntnisse in ein Koordinatensystem im Intervall [–6;6].

6) Beweisen Sie: F mit F(x)=$\frac{1}{3}x^3-10x-\frac{9}{x}$ ist eine Stammfunktion von f.

7) Bestimmen Sie den Inhalt der Flächen, die von dem Graphen von f und der x-Achse *vollständig* eingeschlossen werden.

8) Zeigen Sie:
Für die im 1. Quadranten nach oben ungegrenzte Fläche zwischen dem Graphen von f, dem nach links offenen Intervall]0;1] und der y-Achse lässt sich keine reelle Zahl als Maßzahl des Flächeninhaltes dieser Fläche bestimmen.

9) Zeigen Sie: Die Funktion f und die Asymptotenfunktion A(x)=x^2–10 besitzen keinen Schnittpunkt.

10) Ermitteln Sie $A_{[½\,;\,1]}$ für f (Erinnerung: $A_{[a,b]}$ ist der Inhalt der Fläche, die durch die Senkrechten durch a und b und durch den Graphen und die x-Achse im Intervall [a;b] begrenzt wird.)

11) Zeigen Sie, dass die Funktion G mit G(x)= $\frac{1}{5}x^5-\frac{20}{3}x^3+118x+\frac{180}{x}-\frac{27}{x^3}$ eine Stammfunktion zur Funktion g mit g(x)=f(x)·f(x) (also $f(x)^2$) ist.

12) Die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall [1;3] rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des bei der Rotation entstehenden Körpers.

13) t_1 sei die Tangente an den Graphen von f bei x=–2. t_2 sei eine zu t_1 parallele Gerade, die die Asymptotenfunktion A berührt. t_3 sei eine Tangente an A, die die Tangente t_1 orthogonal schneidet.

(I) Bestimmen Sie den Berührpunkt von t_2 mit dem Graphen von A.

(II) Welcher Flächeninhalt wird im 3. Quadranten zwischen t_1 und t_2 eingeschlossen?

(III) Stellen Sie die Gleichung von t_3 auf.