Lösungen zur Kurvenuntersuchung ganz-rationaler Funktionen

Aufgabe 1: $f(x)= x^3–5x^2+6x$

Bei dieser Lösung handelt es sich bei Teilaufgaben um eine verkürzte Darstellung.

a)

$D_f=IR$

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ und $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$

$f(-x) = (-x)^3–5(-x)^2+ 6(–x) = –x^3–5x^2–6x = –(x^3+5x^2+6x) \neq –f(x)$

$f(–x) = –x^3–5x^2–6x \neq f(x)$ $\Rightarrow$ f ist weder achsen- noch punktsymmetrisch.

b) y-Achse: $f(0)=0 \Rightarrow Y(0|0)$

x-Achse: $f(x_N)=0 \Leftrightarrow 0=x^3–5x^2+6x$

$0=x(x^2–5x+6) \Rightarrow x_{N1}=0,\ x_{N2}=3;\ x_{N3}=2$

Achsenschnittpunkte von f: $N_1(0|0)$ $N_2(2|0)$ $N_3(3|0)$

c) $f`(x)=3x^2–10x+6$ $0=3x^2–10x+6 \Leftrightarrow x^2–\frac{10}{3}x+6$

$\Rightarrow$ pq-Gleichung: $x_{E1}=\frac{5}{3}-\sqrt{\frac{7}{9}}\approx0{,}78$ und $x_{E2}=\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}}\approx2{,}5$ (mögliche Extremstellen)

$f``(x)=6x–10$ $f``(0{,}78)\approx–5{,}32 <0 \Rightarrow$ HP bei $x\approx0{,}78$

$f``(2{,}5)\approx 5 >0 \Rightarrow$ TP bei $x\approx2{,}5$

Extrempunkte: $H(0{,}78|2{,}11)$ $T(2{,}5|–0{,}63)$

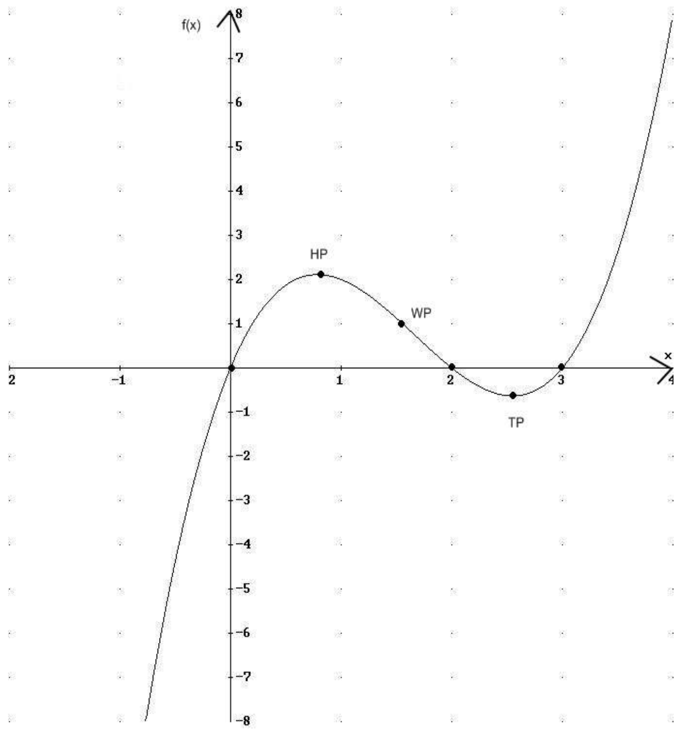
$f``(x)=0 \Leftrightarrow 0=6x–10 \Leftrightarrow 10=6x \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$ (mögliche Wendestelle)

$f```(x)=6\neq0$ für alle $x\in Df \Rightarrow$ Wendestelle bei $x=\frac{5}{3}$

Wendepunkt: $W(\frac{5}{3}|0{,}74)$

d):

Weitere Punkte, die sinnvoll errechnet werden sollten:
P(–1|–12) und P(4|8)
Achtung: Aus technischen Gründen ist die Skalierung an den Achsen unterschiedlich!



Aufgabe 2: $f(x)= x^3–6x^2+12x–8$

Bei dieser Lösung handelt es sich generell um eine stark verkürzte Darstellung.

Verhalten von f am Rand von D_f: $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ und $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$

keine Symmetrien, da $f(-x)\neq f(x)$ und $f(-x)\neq -f(x)$

Durch Probe ergibt sich : erste Nullstelle $x_{N1}=2$

Polynomdivision

$(x^3–6x^2+12x–8):(x–2) = x^2 – 4x +4$

$\underline{–(x^2–2x^2)}$

$–4x^2+12x$

$\underline{–(–4x^2+8x)}$

$4x–8$

$\underline{–(4x–8)}$

0

Ermittlung der weiteren Nullstellen:

$x^2–4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2 \quad \Rightarrow$ dreifache Nullstelle bei x=2!

y-Achsenabschnitt: $f(0)=–8$

Achsenschnittpunkte: $Y(0|–8)$ und $N(2|0)$

$f`(x)=3x^2-12x+12$

$f`(x)=0 \Leftrightarrow 0=3x^2–12x+12 \Leftrightarrow 0=x^2–4x+4 \Leftrightarrow$ pq-Formel: $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$

mögliche Extremstelle: $x_E=2$

$f``(x)=6x-12 \quad f``(2)=6\cdot 2–12=0 \Rightarrow$ Es existiert kein Extremum!

$f``(x)=0 \Leftrightarrow 0=6x–12 \Leftrightarrow x=2$ mögliche Wendestelle: $x_W=2$

$f```(x)=6 \quad f```(2)=6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_W=2$

$f(2)=0 \quad \Rightarrow W(2|0)$

„Merkwürdigkeit“ dieser Funktion: Nur eine (dreifache) Nullstelle bei x=2, an genau dieser Stelle eine mögliche, aber keine echte Extremstelle, dafür einen Wendepunkt.

Weitere errechnete Punkte:

P(–1|–27) und P(4|8)

Achtung: Aus technischen Gründen ist die Skalierung an den Achsen unterschiedlich!