Lösung: Kurvenuntersuchung 3 mit f(x)=x·ln(x)

a)

Nullstellen: $0=x\cdot\ln(x)$

$\Leftrightarrow \ln(x)=0$ (da $0\notin D_f$ ist $x\neq 0$ für alle $x\in D_f$)

$\Leftrightarrow x=1 \quad \Rightarrow$ Schnittpunkt mit der x-Achse N(1|0)

Ein y-Achsenabschnitt existiert nicht, da $0\in D_f$

Extrema: $f`(x)= 1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x)+1$

$0 = \ln(x)+1$

$\Leftrightarrow \quad -1 = \ln(x)$

$\Leftrightarrow \quad x = e^{-1}$

mögliche Extremstelle bei $x=e^{-1}$

$f``(x)= \frac{1}{x}$

$f``(e^{-1})=\frac{1}{e^{-1}}=e^1=e \quad >0 \quad \Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(e^{-1}|f(e^{-1})) = T(e^{-1}|-e^{-1}) \approx T(0{,}37|-0{,}37)$

Wendepunkte: $f``(x)= \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}\neq 0$ für alle $x\in D_f \Rightarrow$ Es existieren keine Wendepunkte.

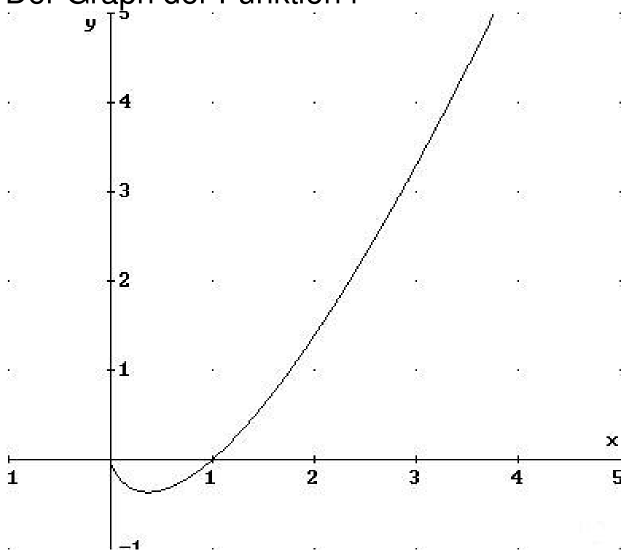
b)

$f(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ und

$f(x)\xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$

(Funktionswerte mit dem Taschenrechner schrittweise bestimmen)

c) Der Graph der Funktion f



d) $g(x)=\frac{1}{2}x^2(\ln(x)-\frac{1}{2})$ (Produktregel)

$g`(x) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot(\ln(x)-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot(\frac{1}{x})$

$= x\cdot\ln(x) - x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot x$

$= x\cdot\ln(x)$

$= f(x)$

Also ist g eine Stammfunktion von f, da g`=f.

e) g ist laut Aufg. d) Stammfunktion von f!

$$\int_1^4 x\cdot\ln(x)dx = g(4)-g(1) = \frac{1}{2}4^2(\ln(4)-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}1^2(\ln(1)-\frac{1}{2}) = 8\cdot(\ln(4)-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(0-\frac{1}{2})$$

$$= 8\cdot\ln(4) - 4 + \frac{1}{4} \approx 7{,}03$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt ca. 7,34 FE.

f) Da $0\notin D_f$, muss ein uneigentliches Integral aufgestellt und berechnet werden.

Sei $b\in D_f$

$$\int_b^1 x\cdot\ln(x)dx = g(1)-g(b) = \frac{1}{2}1^2(\ln(1)-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}b^2(\ln(b)-\frac{1}{2}) \quad = \quad -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}b^2\cdot\ln(b) + \frac{1}{4}b^2$$

$\frac{1}{2}b^2\cdot\ln(b) \xrightarrow[b\to 0]{} 0$ (mit Taschenrechner überprüfen)

$\frac{1}{4}b^2 \xrightarrow[b\to 0]{} 0$ (ist offensichtlich)

also: $\int_b^1 x\cdot\ln(x)dx \xrightarrow[b\to 0]{} -\frac{1}{4}-0+0= -\frac{1}{4}$ (Integral ist negativ, da Fläche unterhalb der x-Achse)

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 0,25 FE.