Lösungen (zu f(x)= $\frac{x^4-10x^2+9}{x^2}$)

1) Sei f(x)= $\frac{g(x)}{h(x)}$. <u>Definitionsmenge:</u> h(x)=x^2 . $x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow x_D=0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

<u>Symmetrie:</u> f(–x)= $\frac{(-x)^4-10(-x)^2+9}{(-x)^2}=\frac{x^4-10x^2+9}{x^2}$ =f(x).

Wegen f(–x)=f(x) gilt: f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

2) Es existiert kein Schnittpunkt mit der y-Achse, da $0\notin D_f$ und f(0) somit nicht definiert ist.

<u>Nullstellen:</u> $f(x_N)=0 \Leftrightarrow 0=\frac{x^4-10x^2+9}{x^2} \Leftrightarrow 0=x^4-10x^2+9$ Substitution: Sei $z=x^2$, dann gilt:

$f(z)=z^2-10z+9$ $f(z)=0 \Leftrightarrow 0=z^2-10z+9 \Leftrightarrow z=9$ oder $z=1$ (Quadr. Erg. oder „pq-Formel")
Resubstitution: $z=9 \Rightarrow 9=x^2 \Rightarrow x_{N1}=3$ und $x_{N2}=-3$ und für z=1 folgt: $x_{N3}=1$ und $x_{N4}=-1$
Da für alle x_N gilt: $x_n\neq 0$, liegt keine hebbare Polstelle vor.

<u>Schnittpunkte</u> mit der x-Achse: $N_1(3|0)$ $N_2(-3|0)$ $N_3(1|0)$ $N_4(-1|0)$

<u>Verhalten von f für $x\to\pm\infty$</u> f(x)= $\frac{x^4-10x^2+9}{x^2}=\frac{x^2(x^2-10+\frac{9}{x^2})}{x^2}=x^2-10+\frac{9}{x^2}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}+\infty$. Die quadratische Funktion A mit $A(x)=x^2-10$ ist die Asymptotenfunktion von f für $x\to\pm\infty$

<u>Verhalten von f für $x\to x_D=0$:</u>
linksseitig: $f(x)\xrightarrow[x\to 0\,linkss.]{}+\infty$ rechtsseitig: $f(x)\xrightarrow[x\to 0\,rechtss.]{}+\infty$ (Bestimmung mit TR)
Es liegt bei $x_D=0$ eine (senkrechte) Polasymptote vor.

3) Extrema/Wendepunkte:
<u>Extrema:</u>

$$f`(x)=\frac{(4x^3-20x)x^2-(x^4-10x^2+9)2x}{x^4}=\frac{4x^5-20x^3-2x^5+20x^3-18x}{x^4}=\frac{2x^5-18x}{x^4}=\frac{2x^4-18}{x^3}$$

(Anstelle der Quotientenregel kann auch die Potenzregel verwendet werden $f(x)=x^2-10+9\cdot x^{-2}$)

$f`(x)=0 \Leftrightarrow 0=\frac{2x^4-18}{x^3} \Leftrightarrow 0=2x^4-18 \Leftrightarrow 18=2x^4 \Leftrightarrow 9=x^4 \Leftrightarrow x_{E1}=\sqrt{3}$ oder $x_{E2}=-\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ mögliche Extremstellen $x_{E1}=\sqrt{3}$ und $x_{E2}=-\sqrt{3}$

$f``(x)=\frac{2x^4+54}{x^4}$ (Ermittelt mit Hilfe der Quotientenregel/Potenzregel)

$f``(\sqrt{3})=8>0 \Rightarrow$ TP bei $x_{E1}=\sqrt{3}$ $f``(-\sqrt{3})=8>0 \Rightarrow$ TP bei $x_{E2}=-\sqrt{3}$

$T_1(\sqrt{3}|-4)$ und $T_2(-\sqrt{3}|-4)$

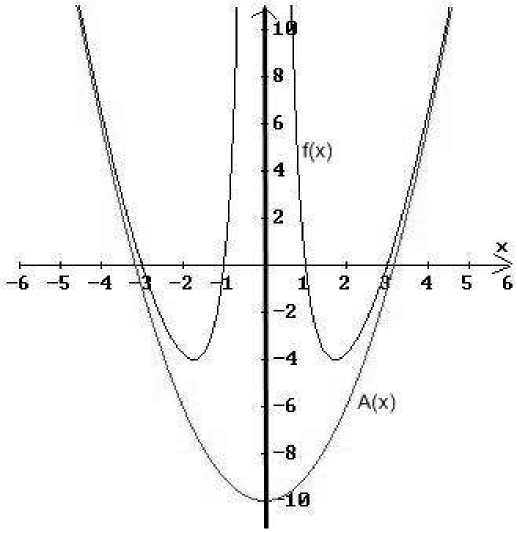
<u>Wendepunkte:</u>

$f``(x)=\frac{2x^4+54}{x^4}=0 \Leftrightarrow 0=2x^4+54 \Leftrightarrow 2x^4=-54 \Leftrightarrow x^4=-27 \Rightarrow$ keine reelle Lösung der Gleichung möglich $\Rightarrow$ Es existieren keine Wendepunkte.
(Somit wird die 3. Ableitungsfunktion von f nicht benötigt!)

4) Die Funktion f kann keine Werte f(x)<–4 annehmen, da die (lokalen) Minima T_1 und T_2 jeweils den Funktionswert y=–4 besitzen **<u>und außerdem</u>** gilt: $f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}+\infty$ und

$f(x)\xrightarrow[x\to x_D=0]{}+\infty$ beidseitig.

5)



6) zu zeigen: $F`(x)=f(x)$ für alle $x\in D_f$

1.Möglichkeit: (schnell)

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-10x-\frac{9}{x}$ Sei $x\in D_f$, also $x\neq 0$.

$F`(x)=x^2-10+9x^{-2}=\frac{x^4}{x^2}-10\frac{x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}$

$=\frac{x^4-10x^2+9}{x^2}=f(x)$

2.Möglichkeit: (langsam)

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-10x-\frac{9}{x}=\frac{x^4-30x^2-27}{3x}$

Ableitung mit Quotientenregel möglich

7) Die Flächen liegen unterhalb der x-Achse und sind wegen der Achsensymmetrie gleich groß.

$\frac{1}{2}A=\left|\int_1^3 f(x)dx\right|=\left|\frac{1}{3}x^3-10x-\frac{9}{x}\right|_1^3=|F(3)-F(1)|=|-24-(-18\frac{2}{3})|=|-\frac{16}{3}|=5\frac{1}{3}\Rightarrow A=2\cdot 5\frac{1}{3}$ FE $=10\frac{2}{3}$ FE.

Die Flächen, die von der x-Achse und dem Graphen von f vollständig eingeschlossen werden, haben einen Gesamtflächeninhalt von $10\frac{2}{3}$ FE.

8) Aufstellen eines uneigentlichen Integrals:

Sei $b\in[0;1]$. $\int_b^1 f(x)dx=F(1)-F(b)=18\frac{2}{3}-(\frac{b^3}{3}-10\cdot b-\frac{9}{b})=18\frac{2}{3}-\frac{b^3}{3}+10\cdot b+\frac{9}{b})\xrightarrow[b\to 0]{}\infty$

da $\frac{b^3}{3}\xrightarrow[b\to 0]{}0$ und $10\cdot b\xrightarrow[b\to 0]{}0$ <u>aber</u> $\frac{9}{b}\xrightarrow[b\to 0]{}\infty$

9) Annahme: Es gibt einen Schnittpunkt mit der Schnittstelle $x_S\in D_f$. Dann muss gelten: $f(x_S)=A(x_S)$

$f(x_S)=A(x_S)$

$\Leftrightarrow \frac{x_S{}^4-10x_S{}^2+9}{x_S{}^2}=x_S{}^2-10 \quad |\cdot x_S{}^2$

$\Leftrightarrow x_S{}^4-10\,x_S+9=(x_S{}^2-10)\cdot x_S{}^2$

$\Leftrightarrow x_S{}^4-10\,x_S+9=x_S{}^4-10\,x_S{}^2 \quad |+10\,x_S$

$\Leftrightarrow x_S{}^4+9=x_S{}^4 \quad |-x_S{}^4$

$\Leftrightarrow 9=0$ unerfüllbare Gleichung $\Rightarrow$ Die Annahme wurde zum Widerspruch geführt $\Rightarrow$ Es existiert kein Schnittpunkt der beiden Funktionen.

10) $A_{[½;1]}$: $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=F(1)-F(0{,}5)=\frac{103}{24}=4\frac{7}{24} \Rightarrow A_{[½;1]}=4\frac{7}{24}$ FE.

11) Bestimmung von g:

$g(x)=f(x)^2=\left(\frac{x^4-10x^2+9}{x^2}\right)^2\overset{\text{ein wenig Rechnerei}}{=}\frac{x^8-20x^6-180x^2+81+118x^4}{x^4}=x^4-20x^2-180x^{-2}+81x^{-4}+118$

$=x^4-20x^2+118-\frac{180}{x^2}+\frac{81}{x^4}$

$G(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{20}{3}x^3+118x+\frac{180}{x}-\frac{27}{x^3} = \frac{1}{5}x^5-\frac{20}{3}x^3+118x+180x^{-1}-27x^{-3}$

$\Rightarrow G`(x)=x^4-20x^2+118-180x^{-2}+81x^{-4} = x^4-20x^2+118-\frac{180}{x^2}+\frac{81}{x^4}=f(x)^2=g(x)$

Also gilt: $G`(x)=g(x)$ für $g(x)=f(x)^2$

12) Rotationskörper – Sei g mit $g(x)=f(x)^2$ aus Aufg. 11) übernommen.

$$V = \pi\cdot\int_1^3 f(x)^2\,dx = \pi\cdot\int_1^3 g(x)\,dx = \pi\cdot(G(3)-G(1)) = \pi\cdot\left(\frac{1408}{5}-\frac{3968}{15}\right) = \pi\cdot\frac{256}{15} \approx 53{,}62$$

Der Körper, der bei der Rotation des Graphen von f um die x-Achse im Intervall [1;3] entsteht, hat den Rauminhalt $V=\pi\cdot\frac{256}{15}$ VE, also rd. 53,62 VE.

13)

(I) t_1 hat die allg. Gleichung $y=m_1x+n_1$ mit $m_1;n_1\in$ IR Für m_1 gilt: $m_1 = f\,`(-2)=\frac{(-2)^4-10(-2)^2+9}{(-2)^2} = -\frac{7}{4}$

t_2 hat die allg. Gleichung $y=m_2x+n_2$ mit $m_2;n_2\in$ IR Da t_1 parallel zu t_2 ist, gilt: $m_1=m_2$, also $m_2 = -\frac{7}{4}$.

Da t_2 den Graphen von A nur berührt, ist t_2 ebenfalls eine Tangente, also gilt : $A`(x_B)=m_2 = -\frac{7}{4}$

$A`(x)= 2x \;\Rightarrow -\frac{7}{4}=2\cdot x_B \;\Leftrightarrow x_B=-\frac{7}{8}$ t_2 Berührt also A an der Stelle $-\frac{7}{8}$

$A(-\frac{7}{4}) = (-\frac{7}{4})^2-10 = -\frac{591}{64} \approx -9{,}23 \;\Rightarrow$ Berührpunkt $B(-\frac{7}{8}\,|-\frac{591}{64})$

t_2 berührt den Graphen von A im Punkt $B(-\frac{7}{8}\,|-\frac{591}{64})$.

(II) Tangentengleichungen aufstellen: t_1: $y=-\frac{7}{4}x+n_1$ t_1 berührt f in $P(-2|f(-2)) \Rightarrow P(-2|-\frac{15}{4})$

$-\frac{15}{4}=-\frac{7}{4}(-2)+n_1 \;\Rightarrow n_1= -\frac{29}{4} \;\Rightarrow\; t_1:\; y=-\frac{7}{4}x-\frac{29}{4}$

t_2: $y=-\frac{7}{4}x+n_2$ t_2 berührt A in $B(-\frac{7}{8}\,|-\frac{591}{64}) \Rightarrow -\frac{591}{64}=-\frac{7}{4}(-\frac{7}{8})+n_2 \;\Rightarrow\; n_2=-\frac{689}{64} \approx 10{,}77$

t_2: $y=-\frac{7}{4}x-\frac{689}{64}$

Zur Flächenberechnung verwenden wir einfach die beiden rechtwinkligen Dreiecke, die sich aus den Schnittpunkten mit den Achsen und dem Ursprung (0|0) ergeben.

Nullstelle von t_1: $0=-\frac{7}{4}x-\frac{29}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{29}{7}$ Nullstelle von t_2 : $0=-\frac{7}{4}x-\frac{689}{64} \Leftrightarrow x=-\frac{689}{112}$

Die zugehörigen Punkte lauten: t_1: $(-\frac{29}{7}|0)$ und $(0|-\frac{29}{4})$ bzw. für t_2: $(-\frac{689}{112}|0)$ und $(0|-\frac{689}{64})$

$A_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{29}{7}\cdot\frac{29}{4}=\frac{29}{4}\approx 15{,}02$ $A_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{689}{112}\cdot\frac{689}{64}\approx 33{,}11$ $A_{ges.}=A_2-A_1\approx 18{,}09$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt rd. 18,09 FE.

Anderer Ansatz: Integration

Zu t_1 und t_2 jeweils noch Stammfunktionen aufstellen: $T_1(x)=-\frac{7}{8}x^2-\frac{29}{4}x$ $T_2(x)=-\frac{7}{8}x^2-\frac{689}{64}x$

$$A=\left|\int_{-\frac{689}{112}}^{0} t_2(x)dx\right| - \left|\int_{-\frac{29}{7}}^{0} t_1(x)dx\right| \approx 18{,}09 \text{ FE}$$

(III) Erinnerung: $g\perp h \Rightarrow m_g=-\frac{1}{m_h}$ Also: $m_1=-\frac{7}{4} \;\Rightarrow\; m_3 = -\frac{1}{-\frac{7}{4}}=\frac{4}{7}$

(Falls keine Erinnerung mehr vorhanden: siehe unten die Alternative)

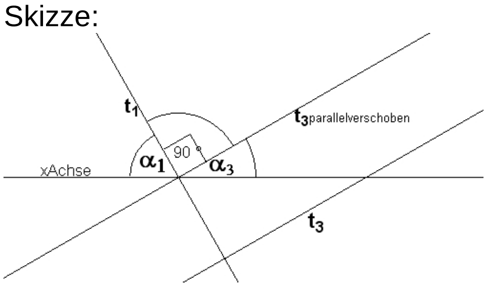
Berührpunkt mit A: $A`(x)= 2x = m_3 \;\Rightarrow 2x_B=\frac{4}{7} \Leftrightarrow x_B=\frac{2}{7}$ $A(\frac{2}{7})=(\frac{2}{7})^2-10=-\frac{486}{49}\approx 9{,}92$ $B(\frac{2}{7}\,|-\frac{486}{49})$

t_3: $y=\frac{4}{7}\cdot x+n_3 \;\Rightarrow\; -\frac{486}{49}=\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{7}+n_3 \Leftrightarrow n_3 = -\frac{486}{49}-\frac{8}{49}=-\frac{494}{49}$ $(\approx 10{,}08)$

Die gesuchte Gleichung lautet: t_3: $y=\frac{4}{7}\cdot x-\frac{494}{49}$

2. Möglichkeit, m_3 zu bestimmen

Skizze:



$\tan(\alpha_1)=m_1=-\frac{7}{4}$ („tan“ : „Verhältnis Länge Gegenkathete zu Länge Ankathete“)

$\Rightarrow \alpha_1=\tan^{-1}(-\frac{7}{4})\approx -60{,}26° \Rightarrow \alpha_1\approx 60{,}26°$

Es gilt: $\alpha_1+90°+\alpha_3= 180°$

$\Rightarrow \alpha_3\approx 29{,}76°$

$\tan(29{,}76°)\approx 0{,}57 \approx \frac{4}{7} \;\Rightarrow m_3=\frac{4}{7}$