Kurvenuntersuchung zur Funktion f mit $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$, von der die zweite und dritte Ableitungsfunktion $f''(x)=\frac{2x-4}{(x+1)^4}$ und $f'''(x)=\frac{18-6x}{(x+1)^5}$ bekannt sind.

a) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte des Graphen von f.

$f(x) = 0$ $\qquad$ $f(0)=\frac{0}{(0+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{x}{(x+1)^2} \quad | \cdot(x+1)^2$ $\qquad$ y-Achsenabschnitt $y_A=0$

$\Leftrightarrow 0 = x$

S(0|0) ist sowohl der Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse als auch der Schnittpunkt mit der y-Achse, da f(0)=0.

b) Bestimmen Sie mögliche Asymptoten.

I) waagerechte Asymptoten:

$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x}}{x^2 \cdot (1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{0}{1+0+0} = 0$ $\Rightarrow$ waagerechte Asymptote bei y=0

II) Polasymptoten

$0=(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x= -1$ $\Rightarrow$ Definitionslücke für f bei $x_D= -1$, da x_D keine Nullstelle der Zählerfunktion ist, existiert bei x=–1 eine Polasymptote.

c) Geben Sie die Definitionsmenge an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x\to\pm\infty$ und für $x\to x_D$, falls Definitionslücken x_D existieren.

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ da bei $x_D=-1$ eine Definitionslücke

$f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ (nach Aufg. b II)

Verhalten von $f(x) \to X_D=-1$

linksseitig: $x\to-1 \Rightarrow f(x)\to -\infty$

rechtsseitig: $x\to-1 \Rightarrow f(x)\to -\infty$

d) Überprüfen Sie, ob eine Achsen- oder Punktsymmetrie vorliegt.

$f(-x)= \frac{-x}{(-x+1)^2} = \frac{-x}{x^2-2x+1} \neq \frac{x}{x^2+2x+1} = f(x)$ $\Rightarrow$ Es liegt keine Achsensymmetrie vor.

$f(-x)= \frac{-x}{(-x+1)^2} = \frac{-x}{x^2-2x+1} = -\frac{x}{x^2+2x-1} \neq -\frac{x}{x^2+2x+1} = -f(x)$ $\Rightarrow$ Es liegt keine Punktsymmetrie vor.

e) Zeigen Sie, dass die erste Ableitungsfunktion von f die Funktionsgleichung $f'(x)=\frac{1-x}{(x+1)^3}$ besitzt.

$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

g(x)= x und somit g´(x)=1

h(x)=x^2+2x+1 und somit h´(x)=2x+2

$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+2x+1)-x\cdot(2x+2)}{(x+1)^4} = \frac{x^2+2x+1-(2x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{x^2+2x+1-2x^2-2x}{(x+1)^4} = \frac{1-x^2}{(x+1)^4} = \frac{(1-x)\cdot(1+x)}{(x+1)^3\cdot(x+1)} = \underline{\frac{1-x}{(x+1)^3}}$

Die erste Ableitungsfunktion von f lautet $f'(x)=\frac{1-x}{(x+1)^3}$.

f) Bestimmen Sie mögliche Extrema oder Wendepunkte.

Mögliche Extrema:

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1-x}{(x+1)^3}=0 \quad | \cdot (x+1)^3$

$\Leftrightarrow 1-x=0 \quad | +x$

$\Leftrightarrow x = 1 \quad \Rightarrow$ mögliche Extremstelle bei $x_E = 1$

$f''(x)=\frac{2x-4}{(x+1)^4}$ laut Aufgabenvorgabe.

$f''(1) = \frac{2\cdot 1-4}{(1+1)^4} = \frac{-2}{16} < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt bei $x_E = 1$

$f(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow H(1|\frac{1}{4})$

Mögliche Wendepunkte:

$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x-4}{(x+1)^4}=0 \quad | \cdot (x+1)^4$

$\Leftrightarrow 2x-4=0 \quad | +4$

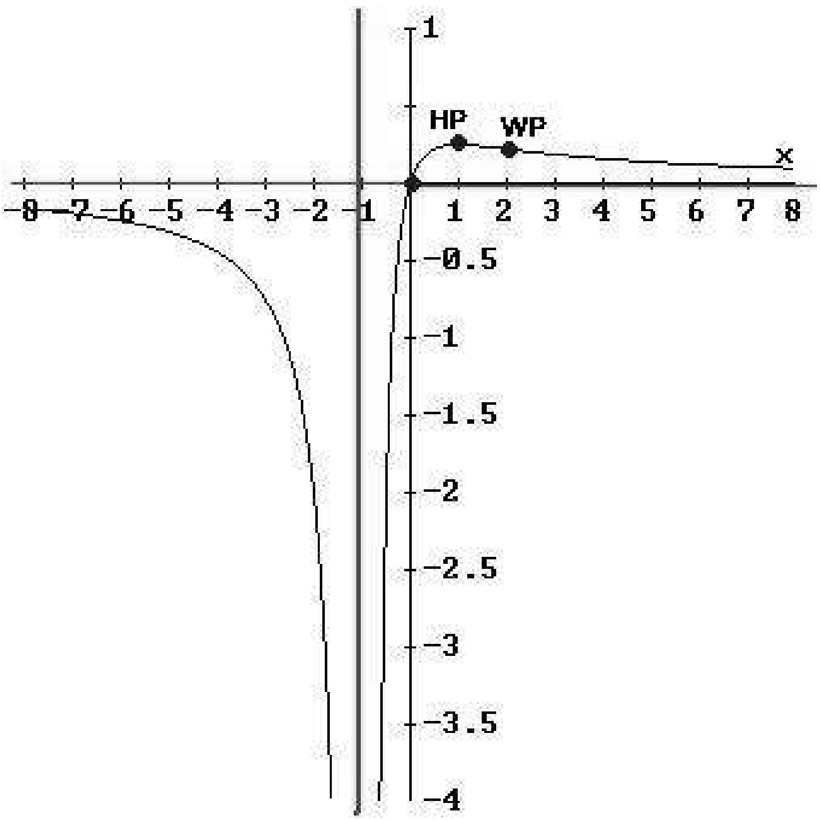
$\Leftrightarrow 2x=4 \quad | :2$

$\Leftrightarrow x=2 \Rightarrow$ mögliche Wendestelle bei $x_w = 2$

$f'''(2)=\frac{18-6\cdot(2)}{(2+1)^5} = \frac{6}{243} \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $x_w = 2$

$f(2) = \frac{2}{(2+1)^2} = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow W(2|\frac{2}{9})$

g) Zeichnen Sie den Graphen von f unter Verwendung und Verdeutlichung der in a) bis f) gewonnenen Erkenntnisse in ein Koordinatensystem.



Bei der Zeichnung muss erkennbar sein:

- Lage von S(0|0); HP(1|0,25); WP(2|$\frac{2}{9}$);
- Polasymptote bei x=–1; waagerechte Asymptote bei x=0 (x-Achse),
- asymptotische Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$, $x \to -1$ links- und rechtsseitig,
- dazu Vollständigkeit und Sorgfalt der Zeichnung.

Ein Erstellen der Zeichnung nur mit Hilfe einer Wertetabelle ist nicht im Sinne der Aufgabenstellung!