Lösungen mit dem GTR: Seiten 1 und 2

Screenshots zu den Lösungen: Seiten 3 und 4

Funktion f_t mit $f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$ (mit $D_f = \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_{>0}$)

Vorweg: $-\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$ $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ ft done (Funktion f_t als ft im GTR definiert)

a) Verhalten am Rand des Definitionsbereiches:

limit(ft(x),x,∞) $-\infty$ $\Rightarrow f_t(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

limit(ft(x),x,−∞) $-\infty$ $\Rightarrow f_t(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$

b) Symmetrie

solve(ft(x)=−ft(x),x) $x=-\sqrt{6}\cdot t$….. $\Rightarrow f_t$ ist nicht punktsymmetrisch.

solve(ft(x)=ft(−x),x) true $\Rightarrow f_t$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

c) Achsenschnittpunkte

y-Achse: $f_t(0) = 0 \Rightarrow y(0|0)$

x-Achse: $0=f_t(x)$ $\Rightarrow$ zeros(ft(x),x) $-\sqrt{6}$ 0 $+\sqrt{6}$ $\Rightarrow$ $N_1(-\sqrt{6}\cdot t|0)$ $N_2(0|0)$ $N_3(\sqrt{6}\cdot t|0)$

d) Extrema

d(ft(x),x) $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ ft1(x)

d(ft1(x),x) $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ ft2(x)

zeros(ft1(x),x) $-\sqrt{3}\cdot t$ $\sqrt{3}\cdot t$ 0 (mögliche Extremstellen)

$f_t''(-\sqrt{3}\cdot t) \approx -2{,}7\cdot t^2 < 0 \Rightarrow$ HP bei $x_1 = -\sqrt{3}\cdot t$ $\qquad f_t(-\sqrt{3}\cdot t) = t^4 \Rightarrow HP_1(-\sqrt{3}\cdot t|\ t^4)$

$f_t''(\sqrt{3}\cdot t) \approx -2{,}7\cdot t^2 < 0 \Rightarrow$ HP bei $x_2 = \sqrt{3}\cdot t$ $\qquad f_t(\sqrt{3}\cdot t) = t^4 \Rightarrow HP_2(\sqrt{3}\cdot t|\ t^4)$

$f_t''(0) \approx 1{,}3\cdot t^2 > 0 \Rightarrow$ TP bei $x_3=0$ $\qquad f_t(0) = 0 \Rightarrow TP(0|0)$

(Es gilt hier $t^2>0$, da $t>0$)

e) Wendepunkte

d(ft2(x),x) $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ ft3(x)

zeros(ft2(x),x) $-t$ t (mögliche Wendestellen)

$f_t'''(-t) = \frac{8}{3}t \neq 0$ (da t≠) $\Rightarrow$ WP bei $x_1=-t$ $\qquad f_t(-t) = \frac{5}{9}t^4 \Rightarrow WP_1(-t|\frac{5}{9}t^4)$

$f_t'''(t) = \frac{40}{3}t \neq 0$ (da t≠) $\Rightarrow$ WP bei $x_2=t$ $\qquad f_t(t) = \frac{5}{9}t^4 \Rightarrow WP_2(t|\frac{5}{9}t^4)$

f) Graphen zeichnen lassen: f_2

◆ W y-Editor: In die Funktionsgleichung für t den Wert t=2 einsetzen.
◆ E Die Werte für xmin auf –5 und xmax auf 5 ändern
◆ R Graph zeichnen lassen. Der Graph erscheinen im vorgegebenen Intervall nicht vollständig im Display, deshalb: Ändern des Bildausschnittes mit der Applikation WINDOW.
◆ E Die Werte für ymin auf –2 und ymax auf 20 ändern.
◆ R Graph erscheint vollständig im Bild.

g) Graphen zeichnen lassen: $f_{0,25}$

t=0,25 ⇒ Nullstellen: $x_1 \approx -0{,}61$ $x_2=0$ und $x_3 \approx 0{,}63$ ⇒ x-Achse: [–0,7 , 0,7]
TP(0|0) $HP_1(-0{,}43|0{,}004)$ $HP_2(0{,}43|0{,}004)$ ⇒ y-Achse: [–0,005 ; 0,005]

Deshalb wählen wir in der Applikation WINDOW:
xmin: –0,7 xmax: 0,7 xscl: 0,1 ymin: –0,005 ymax: 0,005 yscl: 0,001

Der Graph erscheint sinnvoll im Bildausschnitt, denn die Achsenschnittpunkte, Extrema, Wendepunkte und das Verhalten am Rande des Definitionsbereiches sind bei dieser Einstellung in der Applikation WINDOW gut zu erkennen.

h) Bestimmung der Funktion g / Ortskurve

Es gilt für die Funktion g und den Hochpunkt $H_2(\sqrt{3}\cdot t|t^4)$: $x = \sqrt{3}\cdot t$ und $y = t^4$
Wir stellen die erste Gleichungen nach t um: $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Also gilt mit der zweiten Gleichung: $y = t^4 = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^4 = \left(\frac{x^4}{(\sqrt{3})^4}\right) = \frac{x^4}{9} = \frac{1}{9}x^4$

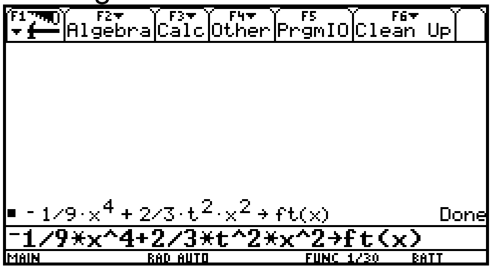
also: $g(x)=y=\frac{1}{9}x^4$

Überprüfung mit dem zweiten Hochpunkt $HP_1(-\sqrt{3}\cdot t|\ t^4)$: $g(-\sqrt{3}\cdot t)= \frac{1}{9}(-\sqrt{3}\cdot t)^4 = \frac{1}{9}\cdot 9\cdot t^4 = t^4$

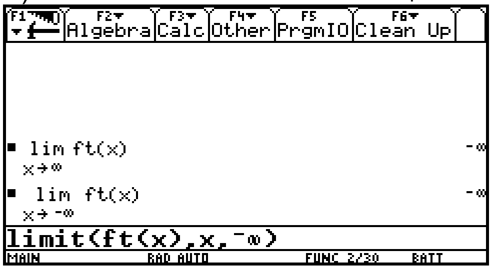
Die gesuchte Funktion g (der zugehörigen Ortskurve) lautet: $g(x)= \frac{1}{9}x^4$

Screenshots des GTR-Displays zu den einzelnen Aufgabenteilen:

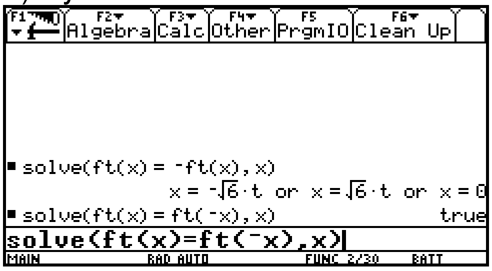
Vorweg: Definieren der Funktion



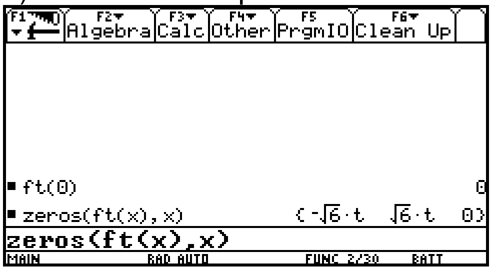
a) Verhalten am Rand des D_f



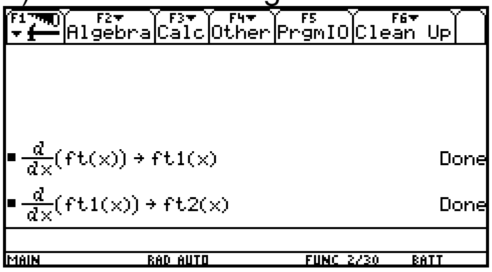
b) Symmetrie



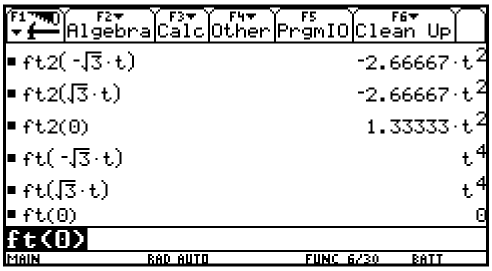
c) Achsenschnittpunkte



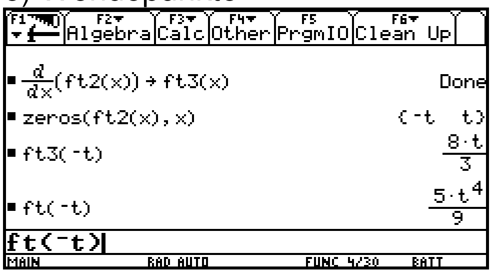
d) 1. u. 2. Ableitungsfunktion def.

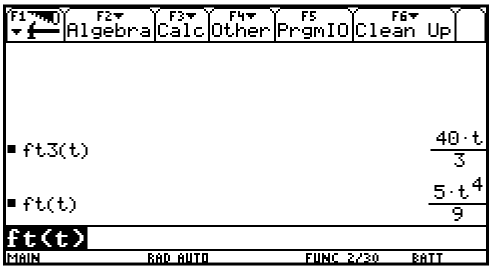


Extrema bestimmen

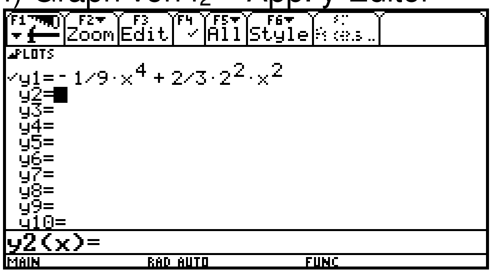


e) Wendepunkte

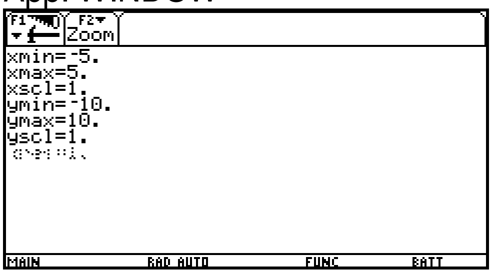




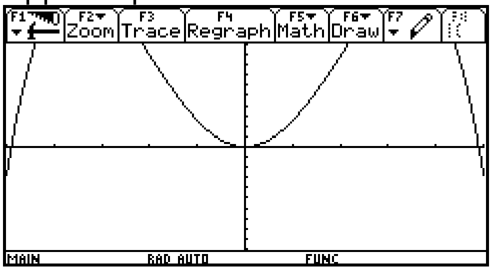
f) Graph von f_2 – App. y-Editor



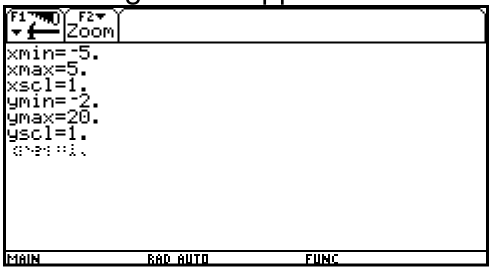
App. WINDOW



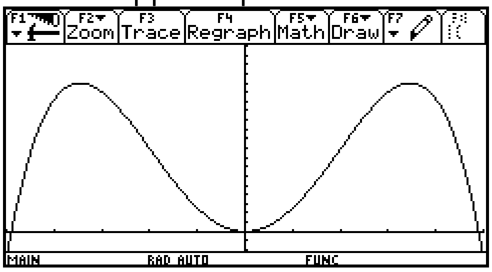
App: Graph



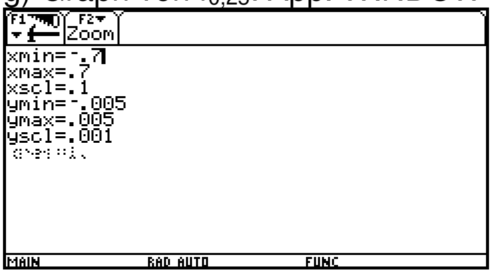
Änderung in der App. WINDOW



erneut: App. Graph



g) Graph von $f_{0,25}$: App. WINDOW



App. Graph