Lösung: Untersuchung der gebrochen-rationalen Funktion f mit f(x)=$\frac{x^2}{x+1}$.

Lösung Aufgabe 1:

a) x+1=0 ⇔ x=–1 ⇒ Definitionslücke bei x=–1 ⇒ D_f=IR\{–1}

b) $\frac{x^2}{x+1}=\frac{x\cdot x}{x\cdot(1+\frac{1}{x})}=\frac{x}{1+\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ bzw $\frac{x}{1+\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$

Es existieren also keine waagerechten Asymptoten.

Da bei x=–1 eine Definitionslücke vorliegt (und –1 keine Nullstelle der Zählerfunktion ist), existiert eine (senkrechte) Polasymptote bei x=–1.

linksseitig: f(x) $\xrightarrow[x\to-1]{}-\infty$ (ermittelt mit Taschenrechner)

rechtsseitig: f(x) $\xrightarrow[x\to-1]{}+\infty$ (ermittelt mit TR)

c) f(x)=0 ⇔ $\frac{x^2}{x+1}$=0 ⇔ x^2=0 ⇔ x=0 ⇒ Doppelte Nullstelle bei x=0 (Graph berührt x-Achse)

(Doppelte) Nullstelle: N(0|0)

f(0)= $\frac{0^2}{0+1}$=0 ⇒ y-Achsenabschnitt bei x=0 Schnittpunkt mit der y-Achse bei S(0|0)

[war aber eigentlich schon wegen der Nullstelle bei x=0 klar]

mögliche Extremstellen: f \`(x)=0

$$f`(x)=\frac{2x(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

f \`(x)=0 ⇔ $\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$=0 ⇔ x^2+2x=0 ⇔ x(x+2)=0 ⇒ x_1=0 und x_2=–2

mögliche Extremstellen bei x_1=0 und x_2=–2

f \`\`(x)=$\frac{2x^2+2}{(x+1)^4}=\frac{2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}$ [Hinweis: Zähler: (2x+2)(x^2+2x+1)–(x^2+2x)(2x+2), dann (richtig) ausmultiplizieren und zusammenfassen]

f \`\`(0)=$\frac{2}{(0+1)^3}$=2>0 ⇒ Tiefpunkt bei x=0 T(0|f(0)) ⇒ T(0|0)

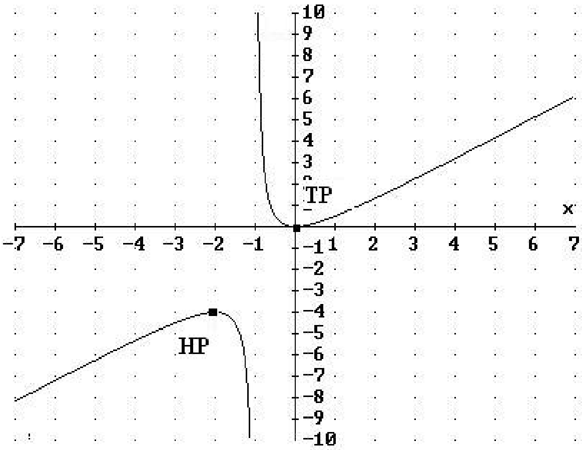
f \`\`(–2)= $\frac{2}{(-2+1)^3}$=–2<0 ⇒ Hochpunkt bei x=–2 H(–2|f(–2)) ⇒ H(–2|–4)

mögliche Wendestellen: f \`\`(x)=0

f \`\`(x)=0 ⇔ $\frac{2}{(x+1)^3}$=0 ⇔ 2=0 ↯ Widerspruch ⇒ Es existieren keine Wendestellen bzw. Wendepunkte.

d) weitere Wertepaare:

x	-7	-4	0	2	4	7
f(x)	-8,2	-5,3	0	1,33	3,2	6,13



Lösung Aufgabe 2a)

f(x)= $\frac{8}{x^2-4}$ (Hilfe: f ``(x) = $\frac{16(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$)

a) D_f=IR\{2;-2}

b) f(-x)=f(x) ⇒ f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

c) Zählerfunktion ohne Nullstelle ⇒ kein Durchgang des Graphen durch die x-Achse

y-Achsenabschnitt: f(0)= $\frac{8}{0^2-4}=\frac{8}{-4}$ = -2 Durchgang durch die y-Achse bei (0|-2)

d) $\frac{8}{x^2-4}=\frac{x^2\cdot\frac{8}{x^2}}{\frac{1}{x^2(1-\frac{4}{x^2})}}=\frac{\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$ also f(x) $\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}$0 ⇒ waagerechte Asymptote

bei y=0, x-Achse ist somit Asymptote.

e) Nullstellen der Nennerfunktion:

0 = x^2-4 ⇒ x_1 = 2 und x_2 = -2 ⇒ senkrechte Polasymptoten bei x_1 = 2 und x_2 = -2

f) f`(x)= $\frac{-16x}{(x^2-4)^2}$ (Quotientenregel)

0 = $\frac{-16x}{(x^2-4)^2}$ ⇔ 0 = -16·x ⇔ 0 = x also mögliche Extremstelle bei x=0

f ``(x) = $\frac{16\cdot(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$ ⇒ f ``(0)= $\frac{16\cdot(3\cdot 0^2+4)}{(0^2-4)^3}=\frac{64}{-64}$ = -1<0

⇒ Hochpunkt bei H(0|-2)

g) Wendepunkte:

f ``(x)=0 ⇒ 0= $\frac{16\cdot(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$

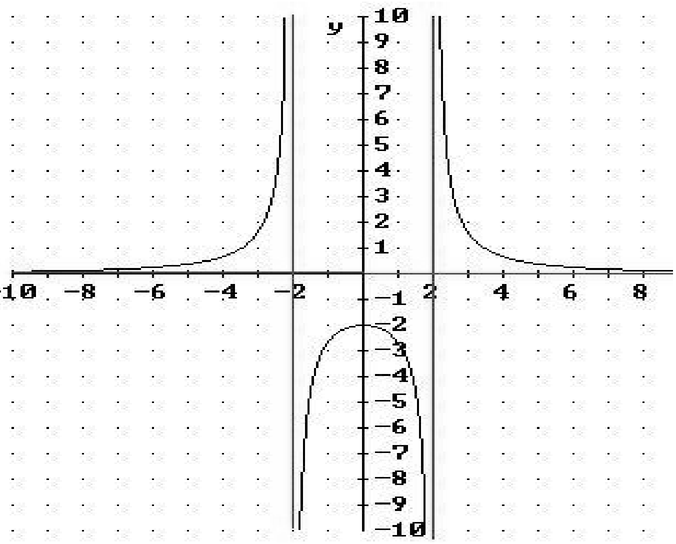
⇔ 0 = 16·(3x^2+4)

⇔ 0 = 3x^2 + 4

⇔ -4 = 3x^2

⇔ x^2 = -$\frac{4}{3}$! keine reelle

Lösung möglich, also existieren keine Wendepunkte.



Lösung Aufgabe 2b)

g(x) = $\frac{x^2-2}{3-x^2}$ g``(x)= $\frac{6x^2+6}{(3-x^2)^3}$; g```(x)= $\frac{24x^3+72x}{(3-x^2)^4}$

a) D_g=IR\{$\sqrt{3}$;-$\sqrt{3}$}

b) g(−x)=g(x) $\Rightarrow$ g ist achsensymmetrisch zur y-Achse

c) Nullstellen: 0 = x^2−2 $\Rightarrow$ x^2 = 2 Nullstellen x_1= $\sqrt{2}$ und x_2=-$\sqrt{2}$
Durchgang durch die x-Achse bei N_1($\sqrt{2}$ |0) und N_2(-$\sqrt{2}$ |0)
y-Achsenabschnitt: g(0)= $\frac{0^2-2}{3-0^2}=\frac{-2}{3}$ =- $\frac{2}{3}$ Durchgang durch die y-Achse bei (0|- $\frac{2}{3}$)

d) $\frac{x^2-2}{3-x^2}=\frac{x^2(1-\frac{2}{x^2})}{x^2(\frac{3}{x^2}-1)}=\frac{(1-\frac{2}{x^2})}{(\frac{3}{x^2}-1)}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}\frac{1-0}{0-1}=\frac{1}{-1}$=-1 f(x) $\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}$-1

$\Rightarrow$ waagerechte Asymptote bei y=−1

e) Nullstellen der Nennerfunktion:
0 = 3-x^2 $\Rightarrow$ x^2=3 $\Rightarrow$ x_1= $\sqrt{3}$ und x_2=-$\sqrt{3}$
senkrechte Polasymptoten bei x_1= $\sqrt{3}$ und x_2=-$\sqrt{3}$

f) Extrempunkte:
g`(x)= $\frac{2x}{(3-x^2)^2}$ $\Rightarrow$ 0 = $\frac{2x}{(3-x^2)^2}$ $\Leftrightarrow$ 0 = 2x $\Leftrightarrow$ x = 0
mögliche Extremstelle bei x=0
g``(x)= $\frac{6x^2+6}{(3-x^2)^3}$ g``(0) = $\frac{6\cdot 0^2+6}{(3-0^2)^3}$ = $\frac{6}{27}$ > 0 $\Rightarrow$ Tiefpunkt T(0|- $\frac{2}{3}$)

g) Wendepunkte:
g``(x)= $\frac{6x^2+6}{(3-x^2)^3}$ $\Rightarrow$

0 = $\frac{6x^2+6}{(3-x^2)^3}$

$\Leftrightarrow$ 0 = $6x^2$+ 6
$\Leftrightarrow$ −6 = $6x^2$
$\Leftrightarrow$ x^2 = −1
keine reelle Lösung, also keine Wendepunkte.